

# 基于 Matlab 的工业机器人运动学分析与仿真

王智兴, 樊文欣, 张保成\*, 史源源  
(中北大学 机械工程与自动化学院, 山西 太原 030051)

**摘要:**为探讨更有效的工业机器人运动学研究方法,以 Stanford 机械手为研究对象,分析了其结构及连杆参数,采用改进的 D-H 法建立了各连杆坐标系和结构的运动学方程;利用 Matlab 的绘图和矩阵计算能力,特别是其 Robotics Toolbox 模块功能,在 Matlab 环境下建立了该机械手的运动学模型,验证了运动学方程的正确性。研究表明,通过机器人模型的手动控制和轨迹规划仿真可以使机器人运动的研究过程更为直观。

**关键词:**工业机器人; Matlab; 运动学; 轨迹规划; 仿真

**中图分类号:** TH12; TH113.2<sup>+</sup>2; TP242.2

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1001-4551(2012)01-0033-05

## Kinematical analysis and simulation of industrial robot based on Matlab

WANG Zhi-xing, FAN Wen-xin, ZHANG Bao-cheng, SHI Yuan-yuan

(School of Mechanical Engineering & Automation, North University of China, Taiyuan 030051, China)

**Abstract:** For the purpose of making kinematic research on industrial robot more effective, Stanford arm was studied. Structure and link parameters were analyzed, modified form of Denavit-Hartenberg notation was applied in establishing link coordinates and kinematical equation. Matlab and Robotics Toolbox were utilized to configure the arm's kinematic model as the software are excellent in drawing and matrix manipulation, validity of kinematical equation was verified. The results show that, it can visualize motion process by means of manual driving and trajectory planning simulation.

**Key words:** industrial robot; Matlab; kinematics; trajectory; simulation

## 0 引言

工业机器人是典型的机电一体化产品,对其实物进行研究和开发存在成本高、周期长等缺点。仿真技术利用系统模型对实际或设想的系统进行试验研究,其应用已经扩大为产品研制的全过程,包括方案论证、设计分析、生产制造等各个阶段。Matlab 是一种可视化的具有强大矩阵计算能力的编程语言,在工业研究、产品开发、数值分析和科学计算等工程及科学方面的教学与研究中是一个十分有效的工具。

本研究以 Stanford 机械手作为研究对象,首先分析其结构和连杆参数,接着采用改进的 D-H 法建立运动学方程,最后在 Matlab 环境下,运用 Robotics Tool-

box 构建运动学模型并进行运动学仿真。

## 1 Stanford 机械手的结构及连杆参数

Stanford 机械手的主要用途是抓取物料,其关节结构由回转主体、大臂、伸长臂、腕部等几部分组成,臂部采用极坐标形式,有 2 个转动关节和 1 个移动关节。腕部有 3 个转动关节以实现手腕的俯仰、翻滚和偏转。整个结构共有 6 个杆件和 6 个关节,具有 6 个关节自由度,如图 1 所示<sup>[1]</sup>。为表示 6 个杆件之间的相对位置和姿态,本研究采用改进的 D-H 法<sup>[2]</sup>建立 6 个杆件的固接坐标系,如图 2 所示。

改进的 D-H 法和 D-H 法的区别在于建立坐标系时原点和坐标轴的选取,同样对连杆  $i$  建立坐标系  $\{i\}$ :采用标准的 D-H 法,  $\{i\}$  的  $z$  轴与关节  $i+1$  的轴

收稿日期:2011-07-05

作者简介:王智兴(1971-),男,山西长治人,主要从事机械系统结构动态设计、振动与噪声控制等方面的研究。E-mail: sxtlwzx@sina.com

通信联系人:张保成,男,教授,博士,硕士生导师。E-mail: ncitzhc@nuc.edu.cn

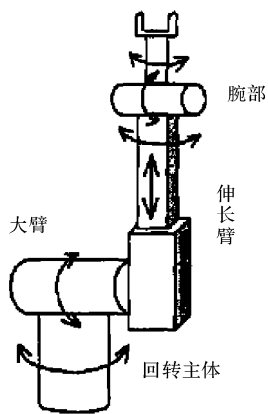


图 1 Stanford 机械手的结构

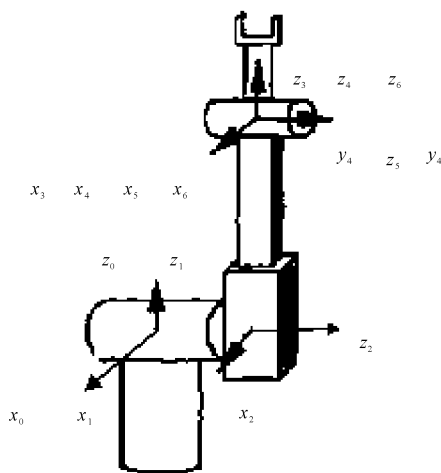


图 2 Stanford 机械手各杆件的坐标系

线重合,  $x$  轴沿着两关节  $i+1$  与  $i+2$  轴线的公垂线, 二者交点即为原点,  $y$  轴由右手定则确定; 采用改进的 D-H 法,  $\{i\}$  的  $z$  轴与关节  $i$  的轴线重合,  $\{i\}$  的  $x$  轴沿着两关节  $i$  与  $i+1$  轴线的公垂线,  $y$  轴及原点确定方法同标准的 D-H 法<sup>[3]</sup>。两种方法表示连杆及相邻连杆间的关系都用到 4 个参数, 连杆偏置  $d$ 、关节角  $\theta$ 、连杆长度  $a$  和扭角  $\alpha$ ,  $a$  和  $\alpha$  表示连杆自身特征,  $d$ 、 $\theta$  表示相邻两连杆之间的关系。

Stanford 机械手的杆件参数如表 1 所示。对于转动关节而言  $\theta$  是关节变量, 其余是关节参数(保持不变), 而移动关节中只有  $d$  是关节变量。本结构中  $d_2$  的取值从参数设计角度看并无特别要求, 为研究方便取  $d_2 = 0.15 \text{ m}$ 。

## 2 Stanford 机械手的运动学分析

研究机械手的结构和连杆参数主要是为运动学分析做准备, 运动学分析是机器人动力学、轨迹规划和位置控制的重要基础, 研究内容是各连杆间的位移、速度

和加速度关系<sup>[4-6]</sup>, 笔者重点研究机械手末端执行器(连杆 6)在基坐标系  $\{0\}$  中的位置姿态与各关节变量取值的关系。运动学问题分正问题和逆问题: 正问题即建立运动学方程, 逆问题即运动学方程的求解。在诸多关于 Stanford 机械手的文献中, 主要利用 D-H 法建立运动学方程, 下面采用改进的 D-H 法对运动学正问题进行分析。

表 1 Stanford 机械手的连杆运动参数

连杆编号	扭角 $\alpha_{i-1}$	杆长 $a_{i-1}$	偏置 $d_i$	关节角 $\theta_i$	关节变量	备注
1	0	0	0	$\theta_1$	$\theta_1$	$0 \sim 360^\circ$
2	$-90^\circ$	0	$d_2$	$\theta_2$	$\theta_2$	$-180^\circ \sim 180^\circ$
3	$90^\circ$	0	$d_3$	0	$d_3$	$0 \sim 20 \text{ mm}$
4	0	0	0	$\theta_4$	$\theta_4$	$-180^\circ \sim 180^\circ$
5	$-90^\circ$	0	0	$\theta_5$	$\theta_5$	$-90^\circ \sim 90^\circ$
6	$90^\circ$	0	0	$\theta_6$	$\theta_6$	$0 \sim 360^\circ$

机器人运动学正问题是, 给定机器人各杆件的几何参数和关节变量, 求解末端连杆坐标系相对于基坐标系的位姿。为建立运动学方程, 用齐次变换矩阵  ${}^i T_{i-1}$  来表示连杆  $i$  坐标系在连杆  $i-1$  坐标系中的位置和姿态, 根据改进的 D-H 法建立坐标系的原则可得:

$${}^i T_{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin\theta_i \cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -d_i \sin\alpha_{i-1} \\ \sin\theta_i \sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & d_i \cos\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

本结构中  $i$  取值为  $1 \sim 6$ , 依次可得:

$${}^0 T_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1 T_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2 T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3 T_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4 T_5 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_5 & -c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5 T_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

公式(2)中的每个矩阵各包含一个关节变量, 由

此可得 Stanford 机械手的运动学方程:

$${}^0T_6 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

公式(3)右端各元素相应表达式为:

$$\begin{aligned} n_x &= c_1 [c_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6] - s_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ n_y &= s_1 [c_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6] + c_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ n_z &= -s_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_2 s_5 c_6 \\ o_x &= c_1 [-c_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6] + s_1 (s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6) \\ o_y &= s_1 [-c_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6] + c_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ o_z &= s_2 c_4 c_5 s_6 + c_2 s_5 s_6 + s_2 s_4 c_6 \\ a_x &= c_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5 \\ a_y &= s_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5 \\ a_z &= -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \\ p_x &= c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ p_y &= s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ p_z &= c_2 d_3 \end{aligned} \quad (4)$$

### 3 Stanford 机械手的运动学仿真

#### 3.1 利用 Link 和 Robot 函数建立机器人对象

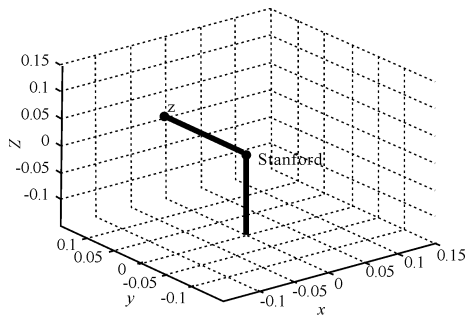


图 3 Stanford 机械手的模型 1

Link 函数的调用格式为  $L = \text{LINK}([\alpha \ A \ \theta \ D \ \text{Sigma}], \text{'modified'})$ , 其中  $\alpha$ 、 $A$ 、 $\theta$ 、 $D$  4 个参数分别表示扭角、连杆长度、关节角和偏置(距离); ‘Sigma’代表关节类型:0 表示转动关节,1 表示移动关节; ‘modified’代表采用改进的 D-H 参数; Robot 函数的调用格式为  $\text{ROBOT}(\text{LINK}, \dots)$ , 即用 LINK 来创建一个机器人对象。对 Stanford 机械手相应的命令如下:

```
L1 = LINK([0 0 0 0 0], 'modified');
```

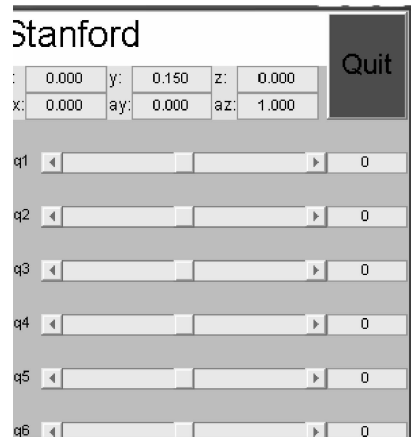


图 4 Stanford 机械手的滑块控制图

```
L2 = LINK([-pi/2 0 0 0 0 0.15 0], 'modified');
L3 = LINK([pi/2 0 0 0 0 1], 'modified'); % 移动关节
L4 = LINK([0 0 0 0 0], 'modified');
L5 = LINK([-pi/2 0 0 0 0], 'modified');
L6 = LINK([pi/2 0 0 0 0], 'modified');
r = robot({L1 L2 L3 L4 L5 L6});
r.name = 'Stanford';
drivebot(r)
```

本研究在 Matlab 中运行上述程序即可生成 Stanford 机械手的运动学模型如图 3 所示, Stanford 机械手模型(图 3)的滑块控制图如图 4 所示。

#### 3.2 运动学模型的检验

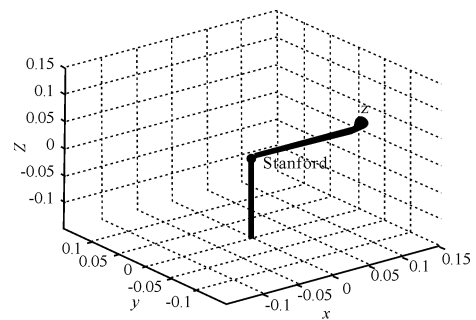


图 5 Stanford 机械手的模型 2

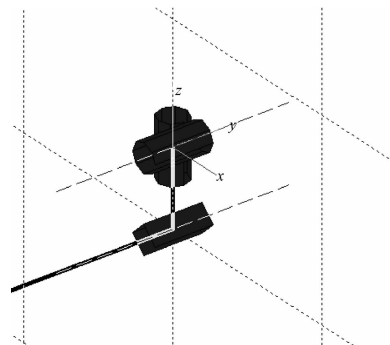


图 6 Stanford 机械手的腕部

通过图 4 中驱动各滑块使机械手运动可以看出,

前 3 个关节的运动可以改变腕部的位置,后 3 个关节运动可使腕部具有不同的姿态。通过调整滑块和关节变量而得到的与图 1 中实际结构近似对应的模型如图 5 所示,图 5 中机械手腕部的局部放大部分如图 6 所示。

为验证运动学方程式(3)和式(4)的正确性,可给定机械手各杆件的几何参数和关节变量,代入运动学方程求解得到末端连杆坐标系相对于基坐标系的设定位姿;再将相应的值输入该机器人的轨迹规划器中,直接读取实际的末端位姿信息进行比较。笔者随机选取 4 组关节变量值:

$$q_1 = [-1.5708, 0, 0.0195, 0, 0, 0], q_2 = [0.7854, 1.0472, 0.010, 1.0472, 0.7854, 1.0472],$$

$$q_3 = [1.7453, -2.0944, 0.015, 1.5708, -1.5708, 1.7453], q_4 = [0, 3.1416, 0.020, 3.1416, 1.5708, 6.2832]。$$

腕部设定位置 and 实际位置信息的比较如表 2 所示。

表 2 Stanford 机械手腕部位置的设定值与实际值比较

组别	设定值			实际值		
	$p_x$	$p_y$	$p_z$	$p_x$	$p_y$	$p_z$
1	0.1500	0	0.0195	0.150	0	0.020
2	-0.0999	0.1122	0.0050	-0.100	0.112	0.005
3	-0.1455	-0.0388	-0.0075	-0.145	-0.039	-0.008
4	0.0000	0.150	-0.0200	0.000	0.150	-0.020

通过分析表中数据,其实际值和设定值误差很

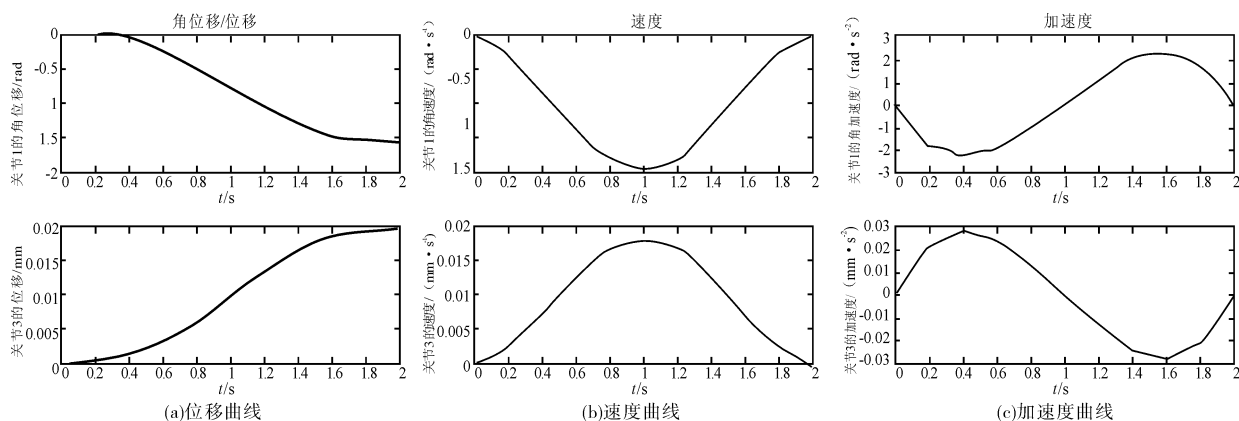


图 7 Stanford 机械手关节 1、关节 3 的位移、速度和加速度曲线

由图 7(a)可以看出转动关节 1 位移由零逐渐变化到  $-1.5708 \text{ rad}$ ,移动关节 3 位移由零逐渐变化到  $0.0195 \text{ m}$ ;由图 7(b)可得,关节 1、3 的初、末速度均为零,速度最大值出现在中间时刻  $t = 1 \text{ s}$ ;由图 7(c)可以看出,初、末加速度均为零,运动中两次出现极值且一正一负。该机械手的位移曲线平滑,速度和加速度曲

线连续说明在此工作过程中机械手的运行比较平稳,整个结构不会产生较大振动。

### 3.3 轨迹规划仿真

轨迹规划是根据作业任务的要求来事先规定机器人的操作顺序和动作过程,轨迹规划仿真可以更详尽直观地描述工业机器人的运动过程<sup>[7-11]</sup>。规划可在关节空间内进行也可以在操作空间内进行。轨迹规划又分点到点运动(PTP)和连续路径运动:前者只需要规定起始点和终止点,后者既要规定起始点和终止点,还要指明若干中间路径点。本研究中轨迹规划仿真采用在关节空间内点到点的规划,主要研究前 3 个关节对机械手运动的影响,规定其起始点为  $q_0 = [0, 0, 0, 0, 0, 0]$ ,终止点为  $q_1 = [-1.5708, 0, 0.0195, 0, 0, 0]$ ,且在两点处机械手的初、末速度为零。运动时间  $t = 2 \text{ s}$ 。相应程序为:

```

q0 = [0 0 0 0 0 0]; % 起始点关节空间矢量
q1 = [-1.5708 0 0.0195 0 0 0]; % 终止点关节空间矢量
t = [0:0.1:2]; % 仿真时间 2 s, 采样间隔 0.2 s
q = jtraj(q0, q1, t); % 构建轨迹命令
plot(r, q)
    
```

运行上述程序即可看到 Stanford 机械手由图 3 运动到图 5 位姿的全过程,还可通过调用函数  $[q, qd, qdd] = \text{jtraj}(q0, q1, t)$  和  $\text{plot}(t, q(:, i))$  绘制此过程中各关节的位移曲线,如图 7(a)所示,其中  $q$  表示位移,  $i$  表示关节编号,本次规划中  $i$  取 1 和 3。同样可绘制速度、加速度的时间曲线,如图 7(b)、(c)所示,相应调用函数为  $\text{plot}(t, qd(:, i))$  和  $\text{plot}(t, qdd(:, i))$ 。

线连续说明在此工作过程中机械手的运行比较平稳,整个结构不会产生较大振动。

## 4 结束语

Stanford 机械手是一种具有代表性且在国内相关

文献研究较多的工业机器人, Matlab 中的 Robotics Toolbox 模块功能涵盖了工业机器人研究的各个方面。基于此,笔者主要做了两方面的工作:①采用改进的 D-H法即前置法建立 Stanford 机械手的运动学方程,由于前置法和后置法在建立各连杆坐标系时  $z$  轴和坐标原点的选取是不一样的,因此所得到的运动学方程的具体表达式也不相同;②在 Matlab 环境下建立了运动学模型,验证了运动学方程的正确性,并进行了轨迹规划仿真,使机械手运动的研究变得更为直观,说明了应用 Matlab 对工业机器人产品的研究、设计和相关教学有较好效果。

### 参考文献 (References):

- [1] 贾卫平. Stanford 机械手运动学及仿真模拟的研究 [D]. 大连:大连理工大学机械工程学院,2000.
- [2] 熊有伦. 机器人技术基础 [M]. 武汉:华中科技大学出版社,2002.
- [3] CRAIG J J. 机器人学导论 [M]. 北京:机械工业出版社,2006.

- [4] 罗家佳,胡国清. 基于 Matlab 的机器人运动仿真研究 [J]. 厦门大学学报,自然科技版,2005,44(5):640-644.
- [5] 李志辉,廖小平,林义忠,等. 6R 喷漆机器人的运动学分析与仿真 [J]. 机械设计与制造,2010(4):176-178.
- [6] 韩军,郝立. 机器人关节空间的轨迹规划及仿真 [J]. 南京理工大学学报,2000,24(6):540-543.
- [7] 舒志兵,张海荣. 多关节机器人的运动学动态仿真研究 [J]. 机器人技术与应用,2006(6):39-42.
- [8] DENAVIT J, HARTENBERG R S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices [J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1995, 21(5):215-221.
- [9] The MathWorks Inc. . Matlab The Language of Technical Computing Version6 [M]. The MathWorks Inc. ,2002.
- [10] CORKE P I. Robotics Toolbox for Matlab (Release7.1) [EB/OL]. [2002-04-01]. <http://www.cat.csiro.au/cmst/staff/pic/robot>.
- [11] 刑迪雄,张琦. 基于 CATIA V5 的工业机器人运动学仿真研究 [J]. 机械,2011,38(1):57-61.

[编辑:张翔]

(上接第 22 页)

### 3 结束语

离散齿谐波传动是以离散齿轮代替现有谐波传动柔轮达到传动刚度高、结构紧凑且性能更符合市场需求的一种传动装置。刚轮是实现传动的关键零件,本研究推导了其齿廓曲线方程,可根据该方程进行齿形设计及齿廓的数控加工,为整机传动精度分析、刚度预估和强度校核及相关的设计计算奠定了基础。本研究对离散齿谐波传动的传动性能进行了参数化讨论与计算,得出在满足正常传动的前提下,适当调节齿形参数可改善传动性能,提高传动平稳性及传动效率,为今后进行齿形优化提供了依据。

### 参考文献 (References):

- [1] 陈仕贤. 离散齿谐波传动:中国,200810172261.6 [P]. 2008-11-04.
- [2] KAYABASI O, ERZINCANLI F. Shape optimization of tooth profile of a flexspline for a harmonic drive by finite element modeling [J]. **Materials and Design**, 2007, 28(2):441-447.
- [3] OSTAPSKI W. Analysis of the stress state in the harmonic drive enerator-flexspline system in relation to selected structural arameters and manufacturing deviations [J]. **Technical**

**Sciences**, 2010, 58(4):683-698.

- [4] DHAOUADI R, GHORBEL F H. Modeling and analysis of nonlinear stiffness, hysteresis and friction in harmonic drive gears [J]. **International Journal of Modeling and Simulation**, 2008, 28(3):329-336.
- [5] GAO W, FURUKAWA M, KIYONO S, et al. Cutting error measurement of flexspline gears of harmonic speed reducers using laser probes [J]. **Precision Engineering**, 2004, 28(3):358-363.
- [6] 阳培,张立勇,王长路,等. 谐波齿轮传动技术发展概述 [J]. 机械传动,2005,29(3):69-72.
- [7] 毛彬彬. 谐波齿轮的齿形研究和发展概述 [J]. 煤矿机械,2008,29(7):6-8.
- [8] 王春艳,白鑫,童镭,等. 基于活齿传动的电动轮自卸车轮边减速器设计 [J]. 机电工程,2011,28(3):286-291.
- [9] 李瑰贤,杨伟君,顾晓华. 滚柱活齿传动受力分析的研究 [J]. 机械设计,2002,19(1):18-20.
- [10] 张翔,董彦,陈文华. 小模数修正摆线铣刀对加工齿轮齿形的影响 [J]. 轻工机械,2010(4):108-110.
- [11] 曲继方. 活齿传动理论 [M]. 北京:机械工业出版社,1993:125-139.

[编辑:张翔]