

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2022.12.010

# 分度圆裂纹齿轮啮合刚度计算及 啮合动态特性分析\*

徐凤宝,刘贵杰\*,马鹏磊,王泓晖,陈 帅  
(中国海洋大学 工程学院,山东 青岛 266100)

**摘要:**为了探究分度圆裂纹对齿轮传动系统产生的影响,利用改进能量法计算分度圆裂纹齿轮的啮合刚度,结合动力学模型对齿轮传动系统进行了动态特性分析。首先,将齿轮的齿根圆视为悬臂梁起点,把分度圆裂纹按照其齿廓投影位置分为了 3 种情况;然后,利用改进能量法理论计算了不同裂纹情况下的齿轮啮合刚度;最后,在啮合刚度的基础上,建立了齿轮系统的六自由度动力学模型,分析了不同裂纹情况下的齿轮系统的动态特性。仿真结果表明:相比于正常齿轮,分度圆裂纹为 2.5 mm 时,齿轮的啮合刚度最多下降 14.3%,传递误差最多升高 12.2%,齿间啮合力最多下降 3.6%,啮合摩擦力最多下降 14.8%;随着裂纹长度增大,齿轮啮合刚度逐渐降低,传递误差随之增大,齿间啮合力和啮合摩擦力逐渐降低。研究表明:由于裂纹的影响,齿轮传动系统会受到周期性冲击。

**关键词:**齿轮传动系统振动;传递误差;齿间啮合力;改进能量法;动力学模型;啮合摩擦力;齿轮点蚀、剥落;时域图、频谱图

中图分类号:TH132.413

文献标识码:A

文章编号:1001-4551(2022)12-1714-06

## Meshing stiffness calculation and meshing dynamic characteristics analysis of gear with graduation circle crack

XU Feng-bao, LIU Gui-jie, MA Peng-lei, WANG Hong-hui, CHEN Shuai  
(College of Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

**Abstract:** To explore the influence of graduation circle crack on the gear transmission system, the improved energy method was used to calculate the mesh stiffness of the graduation circle crack gear, and the dynamic characteristics of the gear transmission system were analyzed in combination with the dynamic model. Firstly, the tooth root circle of the gear was regarded as the starting point of the cantilever beam, and the graduation circle crack was divided into three cases according to its tooth profile projection position. Then, the gear meshing stiffness under different crack conditions was calculated by using the improved energy method theory. Lastly, based on the mesh stiffness, a dynamic model of six degrees of freedom of the gear system was established, and the dynamic characteristics of the gear system under different crack conditions were analyzed. The simulation results show that, compared with normal gears, when the dividing circle crack is 2.5 mm, the meshing stiffness of the gears decreases by 14.3%, the transmission error increases by 12.2%, the meshing force between teeth decreases by 3.6% and the meshing friction decreases by 14.8%. As the crack length increases, the meshing stiffness of the gear decreases gradually, the transmission error increases, and the meshing force and meshing friction between the teeth decrease gradually. The results show that, due to the influence of cracks, the gear transmission system is subject to periodic impact.

**Key words:** gear transmission system vibration; transmission error; meshing force between teeth; improved energy method; dynamic model; meshing friction; pitting and peeling of gear; time domain spectrum and frequency spectrum

收稿日期:2022-05-18

基金项目:国家重点研发计划项目(2020YFB1708003)

作者简介:徐凤宝(1997-),男,黑龙江绥化人,硕士研究生,主要从事齿轮啮合动态特性方面的研究。E-mail:xufengbao@stu.ouc.edu.cn

通信联系人:刘贵杰,男,博士,教授,博士生导师。E-mail:liuguijie@ouc.edu.cn

## 0 引言

齿轮是依靠齿的啮合传递扭矩的轮状机械零件。由于传动效率高、传动比准确、功率范围大等优点,齿轮机构在在航空航天、医疗机械等领域得到了广泛应用。

在长期重载、润滑不良等的工况条件下工作,齿轮易发生点蚀、剥落等故障<sup>[1]</sup>。作为故障形式的一种,分度圆裂纹故障影响着齿轮系统的平稳运行,给系统造成了严重的安全隐患<sup>[2]</sup>。

啮合刚度的阶跃性变化是齿轮传动系统产生振动的主要内部激励。齿轮裂纹导致啮合刚度发生变化,从而影响传动系统啮合动态特性<sup>[3]</sup>。

目前,众多学者对齿轮刚度计算进行了大量的研究。CHAARI F 等人<sup>[4]</sup>利用了材料力学的方法,将含齿根裂纹的轮齿视为变截面的悬臂梁,构建了齿轮的啮合刚度模型。MOHAMMED O D 等人<sup>[5]</sup>在剪切刚度与弯曲刚度的基础上,考虑了压缩势能与基体柔性变形势能,建立了更加准确的齿轮啮合刚度模型。LIANG X 等人<sup>[6]</sup>将齿廓简化为直线,建立了不同裂纹长度的齿轮啮合刚度模型。CHEN Z 等人<sup>[7]</sup>利用能量法对齿轮裂纹进行了研究,并沿齿厚和齿宽两个扩展方向建立了齿轮的啮合刚度模型。孟宗等人<sup>[8]</sup>通过分析完整的齿廓曲线,利用能量法计算了多种裂纹情况下的齿轮刚度,并结合系统的动力学模型,进行了裂纹齿轮振动信号的特征提取。翁武燕等人<sup>[9]</sup>利用能量法求解了分度圆裂纹的刚度,并分析了分度圆裂纹齿轮的振动响应。刘杰等人<sup>[10]</sup>将齿根裂纹的形成过程分为了三个阶段,利用能量法分别建立了其啮合刚度模型,结合齿轮动力学模型对其进行了振动响应分析。冯娜娜等人<sup>[11]</sup>根据能量法,分别建立了不同故障情况下齿轮的刚度变化模型。

综上所述,众多学者利用能量法计算了多种故障类型下的齿轮啮合刚度。但是,到目前为止,针对不同分度圆裂纹长度下齿轮啮合刚度计算公式的研究较少,对于分度圆裂纹齿轮啮合动态特性的研究仍存在一定的空白。

为准确分析分度圆裂纹齿轮的刚度变化及分度圆裂纹齿轮的啮合动态特性,笔者针对齿根圆小于基圆的齿轮,在已有研究的基础上,按照裂纹的投影位置将分度圆裂纹分为 3 种情况,利用改进能量法计算不同裂纹情况下的齿轮啮合刚度;建立齿轮六自由度动力学模型,分析不同裂纹情况下的传递误差、齿间啮合力和啮合摩擦力的变化情况;对比正常齿轮与裂纹齿轮

的时域图与频谱图,分析裂纹对齿轮系统产生的影响。

## 1 分度圆裂纹齿轮刚度计算

### 1.1 改进能量法的齿轮刚度计算理论

目前已有诸多文献在利用传统能量法计算齿轮啮合刚度时,将基圆视为轮齿悬臂梁的起点。而在实际情况下,轮齿悬臂梁的起点为齿根圆。当齿根圆小于基圆时,采用传统能量法得到的计算结果不准确。

笔者针对齿根圆小于基圆的齿轮,在计算齿间能量时加入基圆与齿根圆间的能量。

齿根圆小于基圆的齿轮模型如图 1 所示。

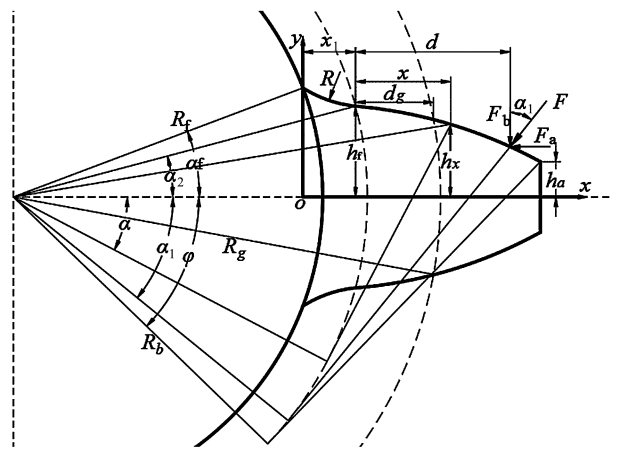


图 1 齿轮模型

基圆与齿根圆间的过渡曲线与加工刀具等多种因素有关。

过渡曲线可近似视为圆弧曲线<sup>[12,13]</sup>,其轨迹方程可表示为:

$$y = R_b \sin \alpha_2 + R - \sqrt{R^2 - (x - R_f \cos \alpha_f)^2} \quad (1)$$

式中:  $R$ —圆弧半径;  $R_b$ —基圆半径;  $R_f$ —齿根圆半径;  $\alpha_2, \alpha_f$ —基圆和齿根圆半齿厚对应的圆心角。

根据材料力学与弹性力学的相关理论,笔者将直齿轮轮齿转化为从齿根圆开始的变截面悬臂梁,当轮齿变形后,弯曲势能  $U_b$ 、剪切势能  $U_s$ 、压缩势能  $U_a$ ,都会产生相应的变化<sup>[14]</sup>。

根据势能与刚度关系可以求解刚度。结合图 1,刚度的计算公式可表示为:

$$U_b = \int_0^{d+x_1} \frac{[F_b(d+x_1-x) - M]^2}{2EI_x} dx = \frac{F^2}{2k_b} \quad (2)$$

$$U_s = \int_0^{d+x_1} \frac{1}{2GA_x} F_b^2 dx = \frac{F^2}{2k_s} \quad (3)$$

$$U_a = \int_0^{d+x_1} \frac{F_a^2}{2EA_x} dx = \frac{F^2}{2k_a} \quad (4)$$

式中:  $k_b$ —弯曲刚度;  $k_s$ —剪切刚度;  $k_a$ —压缩刚度;  $G$ —剪切模量;  $E$ —弹性模量;  $L$ —齿宽;  $M$ —弯矩;  $I_x$ —

距离齿根圆  $x$  处的截面惯性矩;  $A_x$ —截面面积;  $F_b$ ,  $F_a$ —啮合力  $F$  沿坐标系方向上的分力。

单对齿轮啮合的总刚度可表示为多种刚度的串联形式,即:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{a1}} + \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{f1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{a2}} + \frac{1}{k_{s2}} + \frac{1}{k_{f2}}} \quad (5)$$

式中:  $k_h$ —赫兹刚度,其计算公式可参考文献[15];  $k_f$ —基体形变刚度,其计算公式可参考文献[16];下标 1、2—分别指主动轮、从动轮。

当多个齿轮副啮合时,其总刚度可表示为多个单对齿轮副刚度的线性相加。

### 1.2 分度圆裂纹齿轮刚度计算理论

由于不断承受重载,分度圆裂纹齿轮的裂纹路径会发生扩展。笔者在此假设裂纹扩展路径为直线,裂纹贯穿于整个齿宽,在齿宽方向上均匀分布。

分度圆裂纹齿轮模型如图 2 所示。

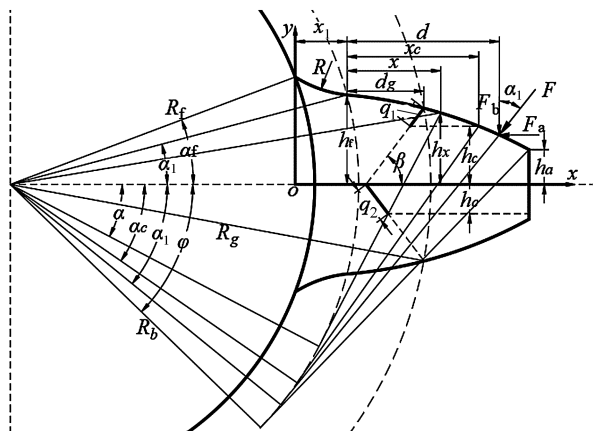


图 2 分度圆裂纹齿轮模型

图 2 中,  $q_1$ —未穿过轮齿中心线的初始裂纹长度;  $q_2$ —穿过中心线的裂纹长度。

分度圆裂纹影响齿轮部分区域的截面惯性矩与截面面积,从而导致齿轮的弯曲刚度、剪切刚度与压缩刚度发生变化,具体分析如下:

(1) 当啮合压力角  $\alpha_1$  小于分度圆压力角  $\alpha_g$  时,即  $\alpha_1 < \alpha_g$ , 此时齿轮啮合刚度不受裂纹影响;

(2) 当  $\alpha_1 > \alpha_g$  时,按照裂纹的扩展情况可分为 3 种情况进行分析:

情况 1 为裂纹未扩展到中心线,裂纹投影在齿廓;情况 2 为裂纹未扩展到中心线,且裂纹投影在齿顶圆;情况 3 为裂纹扩展到中心线下,且裂纹投影在齿顶圆。当裂纹超过情况 3 继续扩展时,轮齿的部分区域无法储存能量,轮齿将急速断裂。

情况 1。当  $h_c \geq h_a$  且  $\alpha_1 > \alpha_c$  时,有:

$$A_x = \begin{cases} (h_c + h_x)L & (d_g \leq x \leq d_c) \\ 2h_xL & (x > d_c, x < d_g) \end{cases} \quad (6)$$

$$I_x = \begin{cases} (h_c + h_x)^3L/12 & (d_g \leq x \leq d_c) \\ (2h_x)^3L/12 & (x > d_c, x < d_g) \end{cases} \quad (7)$$

情况 2。当  $h_c \geq h_a$  且  $\alpha_g < \alpha_1 < \alpha_c$ ,  $h_c \leq h_a$  且  $\alpha_1 > \alpha_g$  时,有:

$$A_x = \begin{cases} (h_c + h_x)L & (x \geq d_g) \\ 2h_xL & (x < d_g) \end{cases} \quad (8)$$

$$I_x = \begin{cases} (h_c + h_x)^3L/12 & (x \geq d_g) \\ (2h_x)^3L/12 & (x < d_g) \end{cases} \quad (9)$$

情况 3。当裂纹超过中心线且  $h_c \leq h_a$  时,若  $\alpha_1 > \alpha_g$ , 有:

$$A_x = \begin{cases} (h_x - h_c)L & (x \geq d_g) \\ 2h_xL & (x < d_g) \end{cases} \quad (10)$$

$$I_x = \begin{cases} (h_x - h_c)^3L/12 & (x \geq d_g) \\ (2h_x)^3L/12 & (x < d_g) \end{cases} \quad (11)$$

其中:  $h_c = R_g \sin \alpha_g - q \sin \beta$ 。

$h_x$  按照积分位置可分为 2 种情况:

$$h_x = \begin{cases} R_b [(\alpha + \alpha_2) \cos \alpha - \sin \alpha] & (x > x_1) \\ R_b \sin \alpha_2 + R - \sqrt{R^2 - (x - R_f \cos \alpha_f)^2} & (0 \leq x \leq x_1) \end{cases}$$

式中:  $\alpha$ — $x$  位置处的压力角。

### 1.3 不同分度圆裂纹下啮合刚度仿真求解

分析分度圆裂纹对刚度的影响,能够更好地进行齿轮的故障特征分析。

为了探究裂纹长度对啮合刚度的影响情况,设计不同裂纹长度,笔者结合齿轮参数进行仿真分析。

齿轮副参数如表 1 所示。

表 1 齿轮副参数

参数/单位	主动轮	从动轮
模数/mm	2	2
齿宽/mm	20	20
压力角/(°)	20	20
齿数	20	25
弹性模量/GPa	212	212
泊松比	0.289	0.289

假设裂纹角度  $\beta = 45^\circ$ , 裂纹长度设置为 1 mm(裂纹情况 1)、2 mm(裂纹情况 2)、2.5 mm(裂纹情况 3)与正常齿轮进行对比,可以得到弯曲刚度  $k_b$ 、剪切刚度  $k_s$ 、压缩刚度  $k_a$  与综合啮合刚度  $k_{sum}$ ,如图 3 所示。

由图 3(a~c)可知:随着啮合压力角增大,即齿轮啮合点逐渐远离齿根圆,  $k_b$ 、 $k_s$  和  $k_a$  逐渐降低,并且  $k_a$  下降速度最快。

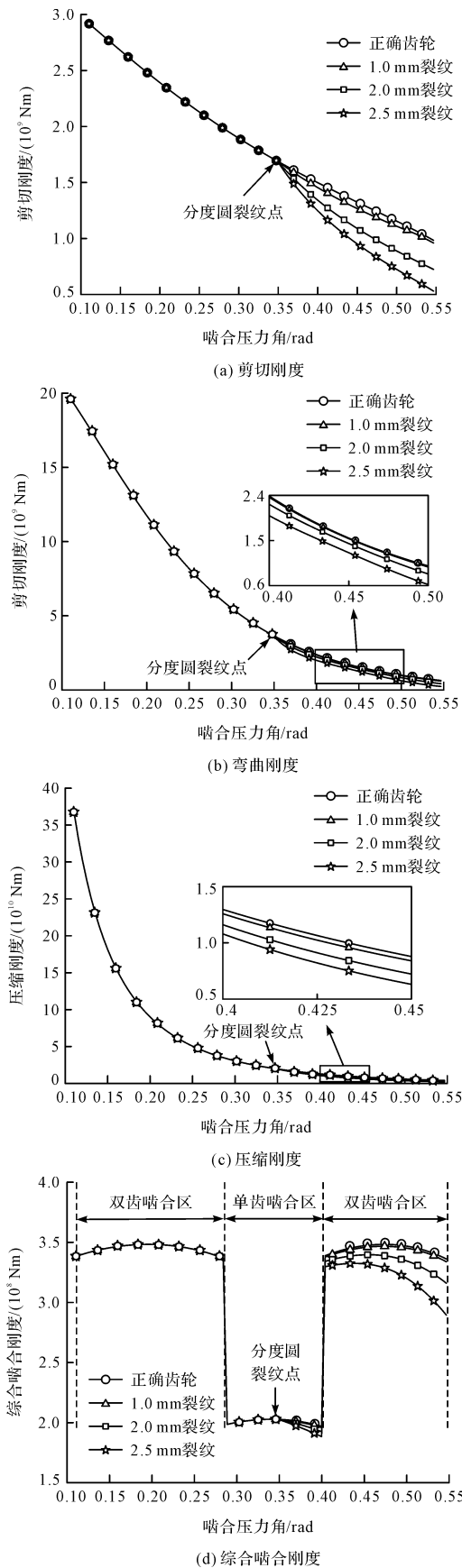


图 3 不同分度圆裂纹刚度对比图

根据能量法理论可知:分度圆裂纹只会影响轮齿部分区域的刚度。故在 4 种情况下(3 种裂纹情况以

及 1 种正常齿数情况),当啮合压力角小于分度圆压力角时, $k_b$ 、 $k_s$  和  $k_a$  不受裂纹影响;在啮合点压力角大于分度圆压力角时,随着裂纹长度增加, $k_b$ 、 $k_s$  和  $k_a$  逐渐降低,即分度圆裂纹对齿轮产生的影响逐渐变大。在 3 种刚度中,剪切刚度  $k_s$  受裂纹影响最大,相比于正常齿轮,2.5 mm 裂纹下的  $k_s$  最多下降 49%。压缩刚度  $k_a$  几乎不受裂纹影响;

由图 3(d)可知:由于单双齿交替啮合,综合啮合刚度  $k_{sum}$  呈阶跃式变化;4 种情况下,当啮合点未到达分度圆裂纹点时, $k_{sum}$  不受裂纹影响;当啮合点超过分度圆裂纹点后,随着裂纹增长, $k_{sum}$  逐渐降低。在裂纹为 2.5 mm 时,相比于正常齿轮, $k_{sum}$  最多下降 14.3%。

## 2 分度圆裂纹齿轮动态特性分析

为了分析分度圆裂纹齿轮的动态特性,笔者建立了六自由度齿轮系统动力学模型,如图 4 所示。

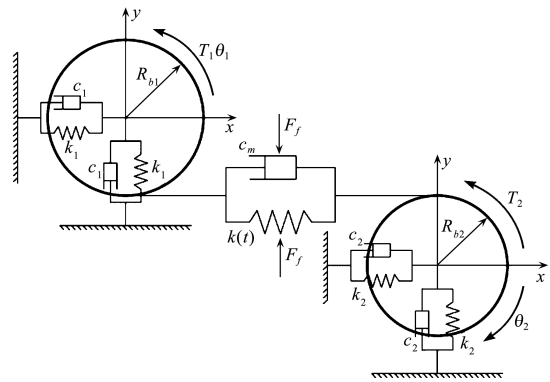


图 4 六自由度动力学模型

假设齿轮啮合无误差,在不考虑齿轮箱体共振的情况下,笔者建立齿轮啮合过程的动力学方程,以分析不同裂纹长度下的齿轮动态特性,即:

$$\begin{cases}
 m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 = -F_m \\
 m_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 = -F_f \\
 I_1 \ddot{\theta}_1 = T_1 - R_{b1} F_m - M_1 \\
 m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 = F_m \\
 m_2 \ddot{y}_2 + c_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 = F_f \\
 I_2 \ddot{\theta}_2 = R_{b2} F_m + M_2 - T_2
 \end{cases} \quad (12)$$

式中: $T_1$ 、 $T_2$ —主、从动轮施加的扭矩; $m_1$ 、 $m_2$ —主、从动轮的质量; $I_1$ 、 $I_2$ —主、从动轮的转动惯量; $c_1$ 、 $k_1$ —主动轮的轴承刚度与阻尼; $c_2$ 、 $k_2$ —从动轮的轴承刚度与阻尼; $F_m$ —齿间啮合力; $F_f$ —啮合摩擦力; $M_1$ 、 $M_2$ —啮合摩擦力形成的转矩。

$F_m$  可表达为:

$$F_m = k_{sum} \delta + c_m \dot{\delta} \quad (13)$$

式中： $c_m$ —齿轮啮合阻尼； $\delta$ —传递误差。

$\delta$  可表达为：

$$\delta = x_1 + R_{b1}\theta_1 - (x_2 + R_{b2}\theta_2) \quad (14)$$

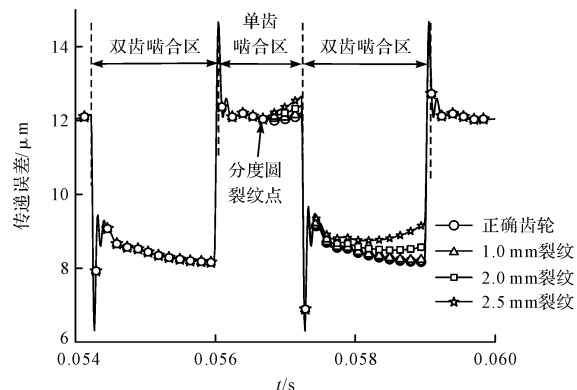
$F_f$  计算公式为：

$$F_f = \mu k(t) [(x_1 - x_2) - (R_{b1}\theta_1 - R_{b2}\theta_2)] + \mu c_m [(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - (R_{b1}\dot{\theta}_1 - R_{b2}\dot{\theta}_2)] \quad (15)$$

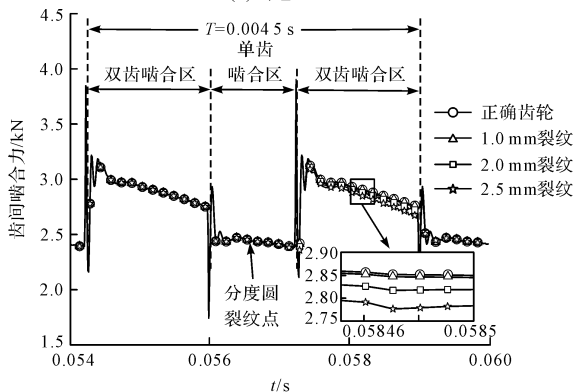
式中： $\mu$ —摩擦系数，该文取  $\mu = 0.06$ 。

笔者根据齿轮相关参数及动力学理论，采用 Runge-Kutta 迭代方式求解齿轮动力学方程。设置主动轮的转速恒定为 16.6 Hz，则齿轮啮合频率  $f_m$  为 332 Hz。

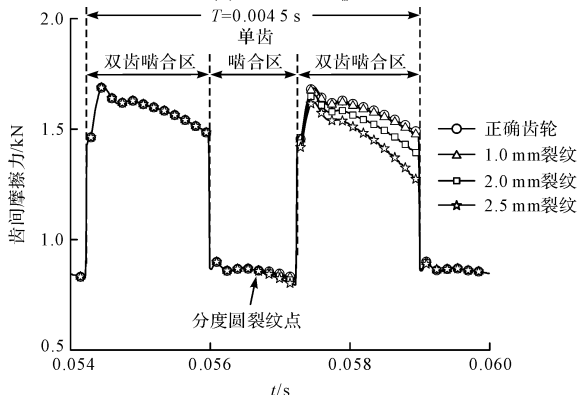
在求出分度圆裂纹齿轮啮合刚度的基础上，笔者选取传递误差、齿间啮合力和啮合摩擦力，分析齿轮啮合过程中的动态特性，其仿真结果如图 5 所示。



(a) 传递误差  $\delta$



(b) 齿间啮合力  $F_m$



(c) 齿间摩擦力  $F_f$

图 5 4 种情况下动态特性对比

由图 5(a~c) 可知：由于单双齿交替啮合，传递误差  $\delta$ 、齿间啮合力  $F_m$  和啮合摩擦力  $F_f$  呈周期性变化。在单双齿交替啮合点附近，由于综合啮合刚度  $k_{sum}$  的阶跃变化，导致齿轮系统受到冲击， $\delta$ 、 $F_m$  和  $F_f$  产生较大波动。

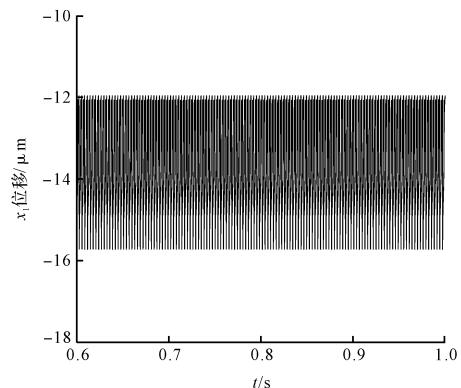
根据上述齿轮啮合刚度分析结果可知：当轮齿产生分度圆裂纹时，轮齿的部分区域不受裂纹影响，故在 4 种情况下，当啮合点未到分度圆裂纹点时， $\delta$ 、 $F_m$  和  $F_f$  不受裂纹影响；

当啮合点超过分度圆裂纹点时，由于齿轮啮合刚度降低，导致裂纹齿轮承载能力降低，啮合变形量增大，故  $\delta$  增大， $F_m$  和  $F_f$  降低。同时，随着分度圆裂纹逐渐增大，齿轮的承载能力逐渐降低，故  $\delta$  逐渐增大， $F_m$  和  $F_f$  逐渐降低。相比于正常齿轮，在裂纹为 2.5 mm 时，传递误差  $\delta$  最多升高 12.2%，齿间啮合力  $F_m$  最多下降 3.6%，啮合摩擦力  $F_f$  最多下降 14.8%。

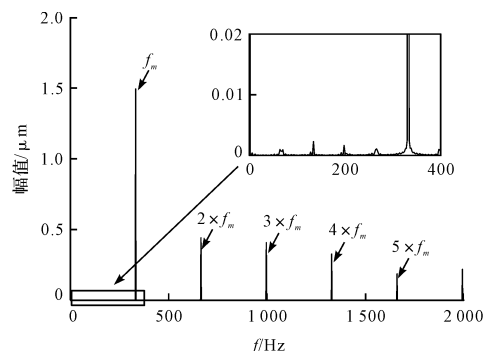
由于振动信号可以表征系统的运行状态，笔者提取正常状态齿轮与 2.5 mm 裂纹齿轮的  $x$  方向的振动信号进行对比分析，其对比结果如图 6 所示。

根据图 6(a,b) 正常齿轮的时域图与频谱图可知：正常齿轮的啮合具有周期性，频谱图中的频率主要为啮合频率及其倍频。

由图 6(c,d) 2.5 mm 裂纹的时域图与频谱图可知：由于裂纹的存在，齿轮啮合系统受到周期性冲击，冲击周期为齿轮的旋转周期 0.06 s；并且，由于裂纹的存在，使得啮合频率  $f_m$  附近出现了复杂的边带结构。



(a) 正常齿轮时域图



(b) 正常齿轮频谱图

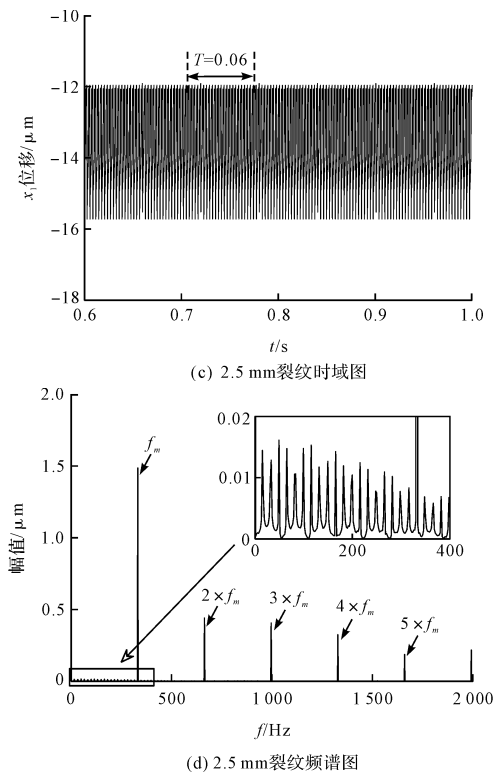


图 6 不同裂纹时域图与频谱图

### 3 结束语

针对齿根圆小于基圆的齿轮,笔者利用改进能量法计算了不同分度圆裂纹长度下的齿轮刚度,并建立了齿轮六自由度动力学模型,对分度圆裂纹齿轮的动态性能进行了分析。

研究结论如下:

(1) 啮合压力角小于分度圆压力角时,齿轮的刚度不受裂纹影响;当啮合压力角大于分度圆压力角时,相比于正常齿轮,分度圆裂纹 2.5 mm 的齿轮综合啮合刚度最多下降 14.3%,剪切刚度下降 49%;随着裂纹增大,综合啮合刚度、剪切刚度、压缩刚度和弯曲刚度随之降低;

(2) 相对于正常齿轮,分度圆裂纹齿轮的传递误差随着裂纹增大而逐渐变大,齿间啮合力和啮合摩擦力逐渐降低,当裂纹为 2.5 mm 时,传递误差最多升高 12.2%,齿间啮合力最多下降 3.6%,啮合摩擦力最多下降 14.8%。通过分析时域图和频谱图可知:分度圆裂纹的存在使系统受到周期性冲击,同时在啮合频率附近出现了丰富的边频带。

目前,笔者仅对分度圆裂纹齿轮的啮合动态特性

进行了理论计算。在后续的研究中,笔者将开展分度圆裂纹齿轮啮合实验,以验证理论计算的准确性。

### 参考文献 (References):

- [1] 雷亚国,罗希,刘宗尧,等.行星轮系动力学新模型及其故障响应特性研究[J].机械工程学报,2016,52(13):111-122.
- [2] 樊嘉峰,邓铁松,苏钊颐,等.分度圆裂纹齿轮副动态特性及故障诊断[J].机车电传动,2016(3):74-78.
- [3] WAN Z, CAO H, ZI Y, et al. Mesh stiffness calculation using an accumulated integral potential energy method and dynamic analysis of helical gears [J]. **Mechanism and Machine Theory**, 2015, 92:447-463.
- [4] CHAARI F, FAKHFAKH T, HADDAR M. Analytical modelling of spur gear tooth crack and influence on gearmesh stiffness [J]. **European Journal of Mechanics-A/Solids**, 2009, 28(3):461-468.
- [5] MOHAMMED O D, RANTATALO M, AIDANPÄÄ J. Dynamic modelling of a one-stage spur gear system and vibration-based tooth crack detection analysis [J]. **Mechanical Systems and Signal Processing**, 2015, 54-55(3):293-305.
- [6] LIANG X, ZUO M J, FENG Z. Dynamic modeling of gearbox faults: a review [J]. **Mechanical Systems and Signal Processing**, 2018, 98(1):852-876.
- [7] CHEN Z, SHAO Y. Dynamic simulation of spur gear with tooth root crack propagating along tooth width and crack depth [J]. **Engineering Failure Analysis**, 2011, 18(8):2149-2164.
- [8] 孟宗,石桂霞,王福林,等.基于时变啮合刚度的裂纹故障齿轮振动特征分析[J].机械工程学报,2020,56(17):108-115.
- [9] 翁武燕,吴育仁.直齿圆柱齿轮分度圆的裂纹损伤机理研究[J].机电工程,2019,36(6):555-561.
- [10] 刘杰,孙玉凤,李环宇.不同齿根裂纹深度的啮合刚度与振动响应分析[J].振动.测试与诊断,2021,41(2):275-282.
- [11] 冯娜娜,吴海森.齿轮故障对直齿齿轮副时变啮合刚度的影响研究[J].机械传动,2021,45(1):99-103.
- [12] 万志国,瞿艳阳,曹宏瑞,等.时变啮合刚度算法修正与齿根裂纹动力学建模[J].机械工程学报,2013,49(11):153-160.
- [13] 任学平,武海锋.含齿根裂纹故障的平行轴齿轮箱动力学特性研究[J].机电工程,2020,37(8):861-867.
- [14] 闫茹,曹巨江,刘言松.内啮合弧面凸轮机构压力角的计算方法[J].包装与食品机械,2021(1):44-49.
- [15] YANG D C H, SUN Z S. A rotary model for spur gear dynamics [J]. **Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design**, 1985, 107(4):529-535.
- [16] SAINOT P, VELEX P, DUVERGER O. Contribution of gear body to tooth deflections - a new bidimensional analytical formula [J]. **Journal of Mechanical Design**, 2004, 126(4):748-752.

[编辑:雷敏]

#### 本文引用格式:

徐凤宝,刘贵杰,马鹏磊,等.分度圆裂纹齿轮啮合刚度计算及啮合动态特性分析[J].机电工程,2022,39(12):1714-1719.

XU Feng-bao, LIU Gui-jie, MA Peng-lei, et al. Meshing stiffness calculation and meshing dynamic characteristics analysis of gear with graduation circle crack [J]. **Journal of Mechanical & Electrical Engineering**, 2022, 39(12):1714-1719.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>