

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2019.11.009

# 紧凑型 3-RRS 并联机构运动学仿真及控制研究<sup>\*</sup>

倪仕全<sup>1,2</sup>, 田大鹏<sup>1\*</sup>, 石磊<sup>1</sup>

(1. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所 航空光学成像与测量重点实验室, 吉林 长春 130033; 2. 中国科学院大学, 北京 100049)

**摘要:**针对传统的 3-RRS 并联机构在运动时,其主动件向机构外部转动时占用外部空间,不能合理利用机构内部空间资源的问题,设计了一种紧凑型 3-RRS 并联机构。根据紧凑型 3-RRS 并联机构运动学特性,对其进行了运动学分析,利用 Simulink/SimMechanics 工具箱搭建了该并联机构运动学仿真平台,对该机构的运动学模型进行了验证;同时,在 Simulink/SimMechanics 工具箱搭建了该机构的控制仿真平台,并采用均方根误差对该并联机构控制策略的优劣进行了评判。仿真及研究结果表明:该紧凑型 3-RRS 并联机构运动时,主动件可在机构内部转动并且运行平稳,动平台中心点轨迹连续平滑,运动学性能良好。

**关键词:**紧凑型 3-RRS 并联机构;运动学分析;Simulink/SimMechanics;控制仿真

中图分类号:TH113;TP271

文献标识码:A

文章编号:1001-4551(2019)11-1172-05

## Kinematics simulation and control of compact 3-RRS parallel mechanism

NI Shi-quan<sup>1,2</sup>, TIAN Da-peng<sup>1</sup>, SHI Lei<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory of Airborne Optical Imaging and Measurement, Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Science, Changchun 130033, China;  
2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract:** Aiming at the problem that the external space of the traditional 3-RRS parallel mechanism is token up when the active part rotates outside the mechanism during the movement, and the internal space resources of the mechanism is not utilized reasonably, a compact 3-RRS parallel mechanism was designed. According to the kinematics of the compact 3-RRS parallel mechanism, the kinematics analysis was carried out, and the Simulink/SimMechanics toolbox was built to construct the kinematics simulation platform of the parallel mechanism to verify the kinematics modeling of the mechanism. The control simulation platform of the organization was built in the Simulink/SimMechanics toolbox, and the RMSE was used to judge the advantages and disadvantages of the parallel mechanism control strategy. The simulation results show that when the compact 3-RRS parallel mechanism is moving, the active part rotates inside the mechanism and runs smoothly. The center point of the moving platform is continuous and smooth, and the kinematics performance is good.

**Key words:** compact 3-RRS parallel mechanism; kinematics analysis; Simulink/SimMechanics; control simulation

## 0 引 言

自由度并联机构的研究,特别是三自由度并联机构成为了新的研究热点<sup>[1-2]</sup>。三自由度对称并联机构是并联机构领域的一个重要分支,与六自由度并联机构相

20 世纪 80 年代以来,世界各国学者开展了对少

收稿日期:2019-03-19

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51705496)

作者简介:倪仕全(1994-),男,山东枣庄人,硕士研究生,主要从事并联机构运动学、动力学方面的研究。E-mail:754935389@qq.com

通信联系人:田大鹏,男,博士,副研究员。E-mail:d.tian@ciomp.ac.cn

比,其具有结构紧凑、易于控制、驱动少、制造简单、精度高等优点,具有广阔的应用前景<sup>[3]</sup>。澳大利亚 HUNT 教授<sup>[4]</sup>提出的 3-RPS 并联机构,可以用于隔离舰船的横摇、纵摇和垂荡<sup>[5]</sup>及追日型光伏支架<sup>[6]</sup>等; CLAVEL 博士<sup>[7]</sup>提出的 3 自由度的 Delta 并联机构,被广泛应用于食品等行业完成包装、分拣等操作; KAROUIA M 等<sup>[8]</sup>提出的 3-RRS 并联机构,具有两个转动自由度和一个移动自由度。3-RRS 并联机构具有广泛的应用范围,如其固定平台安装在固定导轨上,可用于模拟船舶在各种水面上行驶的位置姿态,和车辆在不同路面上行驶的位置姿态等<sup>[9]</sup>。目前,学者们对 3-RPS、Delta 并联机构的研究已取的较多成果,对 3-RRS 并联机构的研究还不足。

由于 3-RRS 并联机构广泛的应用前景,一些学者对其运动学等进行了研究:文献[10]提出了运用牛顿迭代法求解 3-RRS 并联机构正运动学,进行正反解验算运动学的方法;文献[11]对 3-RRS 并联机构进行了正逆运动学分析,并给出了具体的算例,但这只针对并联机构的某一具体位姿;文献[12]针对位置分析,给出了 3-RRS 并联机构的逆运动学、速度、加速度分析;文献[13]利用几何法对 3-RRS 并联机构逆运动学进行了分析,求解了机构的全雅可比矩阵。虽然科研人员对 3-RRS 并联机构的运动学进行了诸多研究,但是上述研究仅在数学建模上对该机构进行了分析,没有对机构的具体运动情况进行仿真,并且上述文献所述的传统 3-RRS 并联机构运动时,主动件向机构外部转动时占用外部空间,不能合理利用机构内部空间资源。

目前常用的运动学仿真软件有 ADMAS、Matlab,在三维软件 CAD 上建立机构模型,并将机构的三维模型导入仿真软件 ADMAS、Matlab 中进行运动学仿真。但是不同软件的联合仿真要涉及接口连接问题,不利于仿真,且操作过程复杂<sup>[14]</sup>。

因此,本文将设计一种紧凑型 3-RRS 并联机构,在机构运动时,主动件可向机构自身内部转动。

## 1 紧凑型 3-RRS 并联机构分析

### 1.1 并联机构设计

本文设计的紧凑型 3-RRS 并联机构如图 1 所示。

从图 1 可知:该并联机构由动平台、固定平台、3 个主动件以及 3 个从动件组成。固定平台通过 3 条对称分布的运动支链分别连接到动平台上。在每条支链中,主动件两端通过 2 个转动副分别与动平台、从动件相连,从动件两端分别通过转动副、球面副与主动件、动

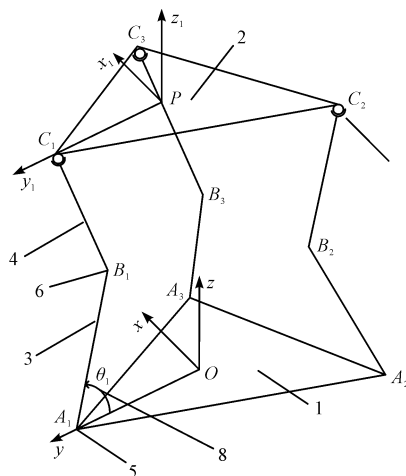


图 1 紧凑型 3-RRS 并联机构

1 - 固定平台;2 - 动平台;3 - 主动件;4 - 从动件;5 - 转动副;6 - 转动副;7 - 球面副;8 - 该方向转动角度为正

平台相连。其中,动平台、固定平台均为正三角形,外接圆半径分别为  $R$  和  $r$ ,主动件、从动件的长度分别为  $L$ 、 $H$ 。

### 1.2 运动学分析

本研究在正  $\triangle A_1A_2A_3$  的几何中心上建立绝对坐标系  $O-xyz$ ,在正  $\triangle C_1C_2C_3$  的几何中心上建立动坐标系  $P-x_1y_1z_1$ ,点  $O$ 、 $P$  分别位于上下平台的几何中心。 $\theta_i$  为主动杆件的转动角度,即  $A_iB_i$  与  $OA_i$  之间的夹角,图 1 所示的方向角度为正。动坐标系  $P-x_1y_1z_1$  的  $y$  轴与  $PC_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 之间夹角为  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),对于固定平台亦然,且有:

$$\alpha_i = \frac{2\pi(i-1)}{3}, i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

由图 1 可知,点  $A_i$  在  $O-xyz$  坐标系中的坐标( $s\alpha_i$  表示  $\sin\alpha_i$ ,  $c\alpha_i$  表示  $\cos\alpha_i$ ,下文类似)为:

$$A_i = [-Rsa_i \quad Rca_i \quad 0]^T \quad (2)$$

点  $B_i$  在  $O-xyz$  坐标系中的坐标为:

$$B_i = [Ls\alpha_i c\theta_i - Rsa_i \quad Rca_i - Lc\alpha_i c\theta_i \quad Ls\theta_i]^T \quad (3)$$

点  $C_i$  在  $P-x_1y_1z_1$  坐标系中的坐标为:

$${}^P C_i = [-rsa_i \quad rca_i \quad 0]^T \quad (4)$$

在描述并联机构运动平台的位姿时,应用欧拉角方法描述。本文采用  $Z-Y-X$  型欧拉角,其旋转矩阵为:

$${}^O_p T = \begin{bmatrix} c\theta_Y c\theta_Z & c\theta_Z s\theta_Y s\theta_X - c\theta_X s\theta_Z & s\theta_X s\theta_Z + c\theta_X c\theta_Z s\theta_Y \\ c\theta_Y s\theta_Z & c\theta_X c\theta_Z + s\theta_X s\theta_Y s\theta_Z & c\theta_X s\theta_Y s\theta_Z - c\theta_Z s\theta_X \\ -s\theta_Y & c\theta_Y s\theta_X & c\theta_Y c\theta_X \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中:  $\theta_x$ —动平台相对固定坐标系  $X$  轴的转角;  $\theta_y$ —动平台相对固定坐标系  $Y$  轴的转角;  $\theta_z$ —动平台相对固定坐标系  $Z$  轴的转角。

设点  $P$  在绝对坐标系  $O - xyz$  的坐标为:

$$\mathbf{P} = [x_p \ y_p \ z_p]^T \quad (6)$$

式中:  $x_p$ —动平台中心点在固定坐标系  $X$  轴坐标;  $y_p$ —动平台中心点在固定坐标系  $Y$  轴坐标;  $z_p$ —动平台中心点在固定坐标系  $Z$  轴坐标。

则点  $C_i$  在绝对坐标系  $O - xyz$  的坐标为:

$$\mathbf{C}_i = {}^0_P \mathbf{T}^P \mathbf{C}_i + \mathbf{P} \quad (7)$$

紧凑型 3-RRS 并联机构每一支链中的两个转动副的轴线相互平行,且垂直于支链所在平面,则动平台的端点必定位于各分支链所在平面内,有:

$$\begin{cases} C_{1X} = 0 \\ C_{2X} = \sqrt{3} C_{2Y} \\ C_{3X} = -\sqrt{3} C_{3Y} \end{cases} \quad (8)$$

由式(7,8)可得 6 个位姿参数的 3 个约束方程:

$$\begin{cases} x_p = -rs\theta_z c\theta_y \\ y_p = \frac{r}{2}(s\theta_z s\theta_y s\theta_x + c\theta_z c\theta_x - c\theta_z c\theta_y) \\ \theta_z = \arctan\left(\frac{s\theta_y s\theta_x}{c\theta_x + c\theta_y}\right) \end{cases} \quad (9)$$

从式(9)可看出:  $z_p$  是独立变量,其他 5 个是变量,给出其中 2 个参数就可确定其余 3 个独立变量。

根据杆长条件可得:

$$\|\mathbf{B}_i - \mathbf{C}_i\| = H^2 \quad (10)$$

即:

$$\begin{cases} (Ls\alpha_1 c\theta_1 + D_1)^2 + (Lc\alpha_1 c\theta_1 + E_1)^2 + \\ (Ls\theta_1 + F_1)^2 - H^2 = 0 \\ (Ls\alpha_2 c\theta_2 + D_2)^2 + (Lc\alpha_2 c\theta_2 + E_2)^2 + \\ (Ls\theta_2 + F_2)^2 - H^2 = 0 \\ (Ls\alpha_3 c\theta_3 + D_3)^2 + (Lc\alpha_3 c\theta_3 + E_3)^2 + \\ (Ls\theta_3 + F_3)^2 - H^2 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

其中:

$$\begin{cases} D_i = -Rs\alpha_i + r\alpha_i(c\theta_x s\theta_z - c\theta_z s\theta_x s\theta_y) - x_p + r\alpha_i c\theta_y c\theta_z \\ E_i = y_p + r\alpha_i(c\theta_x c\theta_z + s\theta_x s\theta_y s\theta_z) - r\alpha_i c\theta_y s\theta_z - R\alpha_i \\ F_i = -z_p - r\alpha_i s\theta_y - r\alpha_i c\theta_y s\theta_x \end{cases} \quad (12)$$

若已知动平台位姿参数  $\theta_x, \theta_y, z_p$ , 求解主动件转角  $\theta_i$ , 为并联机构的逆运动学分析;反之,为并联机构的正运动学分析。

由式(10 ~ 12)可求得逆运动学解为:

$$\theta_i = 2\arctan \frac{-F_i \pm \sqrt{G_i^2 + F_i^2 - H^2}}{H_i - G_i} \quad (13)$$

其中:

$$\begin{cases} H_i = \frac{D_i^2 + E_i^2 + F_i^2 + L^2 - H^2}{2L} \\ G_i = D_i s\alpha_i + E_i c\alpha_i \end{cases} \quad (14)$$

利用数值法对式(11)进行求解,可得并联机构的正运动学解。

## 2 基于 Simulink/SimMechanics 的仿真模型构建

SimMechanics 有许多物理元件的模块,可按物理学原理对系统进行建模,通过设置连接模块的相对位置及运动的方式来建立机械结构。

笔者根据图 1 所示机构的几何关系,建立其运动仿真平台,如图 2 所示。

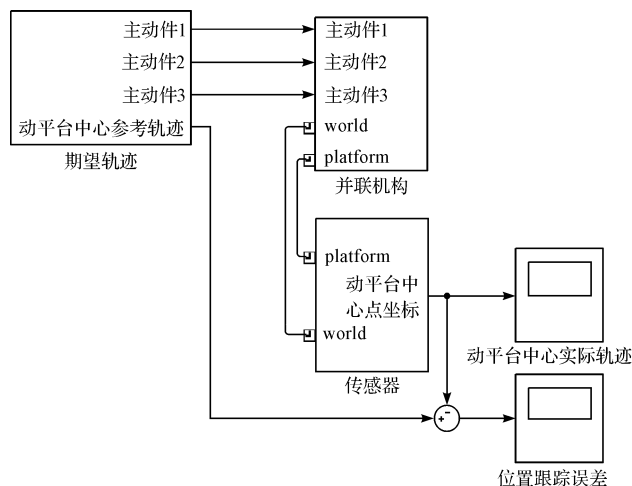


图 2 并联机构的运动学仿真平台

图 2 中,并联机构的运动学仿真平台包括期望轨迹、并联机构模型、传感器、显示器模块。

## 3 运动学仿真验证

根据并联机构的运动仿真模型,给定动平台  $\theta_x, \theta_y, z_p$  随时间变化的轨迹后,可得到主动件的运动参数。给定动平台  $\theta_x, \theta_y, z_p$  随时间变化的轨迹方程如下:

$$\begin{cases} \theta_x = \frac{\pi}{18}s(t) \\ \theta_y = \frac{\pi}{12}s(t) \\ z_p = 3s(t) + 45.673 \end{cases} \quad (15)$$

其中:

$$s(t) = 0.05t - \frac{0.5\sin(0.2\pi t)}{\pi} \quad (16)$$

由式(9,15,16) 可得动平台中心点理论坐标值,通过仿真可以得到动平台中心点实际坐标值。动平台中心点坐标跟踪位移误差如图 3 所示。

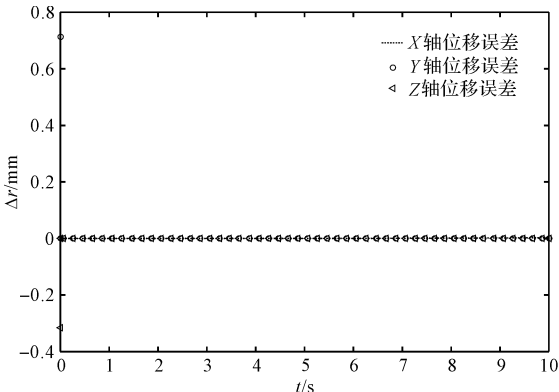


图3 动平台中心点跟踪位移误差

由图 3 可得:(1) 在  $t = 0$  时,位移跟踪误差最大,这是由于机构静止时,动平台中点坐标实际位置与期望位置不同造成的;但是在  $t > 0$  时误差为 0;(2) 说明并联机构的运动学分析、建模的正确性。

4 控制仿真

4.1 PID 控制及效果评判

本文采用 PID 控制方法。PID 控制器对给定值与实际值构成的控制偏差的比例、积分、微分,通过线性组合构成控制量,对被控对象进行控制,即:

$$e(t) = r(t) - c(t) \tag{17}$$

$$u(t) = k_p e(t) + \frac{k_p}{T_i} \int e(t) dt + k_p \frac{de(t)}{dt} \tag{18}$$

式中: $r(t)$ — 给定值; $c(t)$ — 实际值; $e(t)$ — 控制偏差; $\tau$ — 微分时间常数; $T_i$ — 积分时间常数; $k_p$ — 比例系数。

为了评价 PID 控制器的跟踪控制效果,本文采用下式计算轨迹跟踪的均方根误差:

$$RSME = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ((x'_i - x_i)^2 + (y'_i - y_i)^2 + (z'_i - z_i)^2)} \tag{19}$$

式中: $N$ — 采样点数目; $x'_i, y'_i, z'_i$ — 期望轨迹上第  $i$  个点的坐标值; $x_i, y_i, z_i$ — 实际轨迹第  $i$  个点的坐标值。

4.2 并联机构 PID 控制模型

本研究在 SimMechanics 模型的基础上,建立并联机构控制仿真模型,如图 4 所示。

图 4 中,并联机构运动仿真模型包括期望轨迹、并联机构模型、传感器、显示器模块、PID 控制器。其中, PID 控制器根据主动件参考角位移与实际角位移之差而设计。

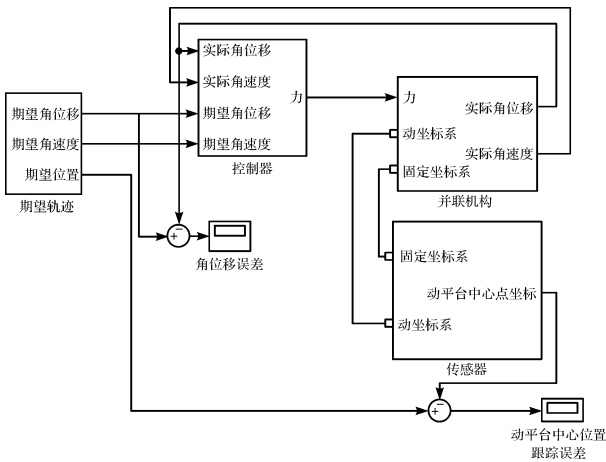


图4 并联机构的控制仿真模型

4.3 仿真及结果分析

本文根据式(9,15,16) 给出的运动轨迹进行仿真。设置仿真时间为 10 s。

依据仿真结果,可得到动平台中心位置跟踪误差,如图 5 所示。

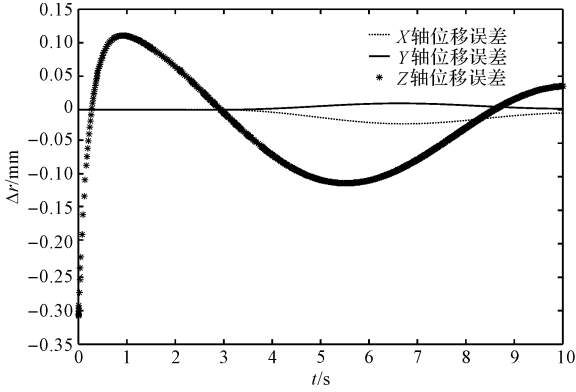


图5 动平台中心位置跟踪误差

从图 5 可以看出:动平台中心点实际坐标与期望坐标基本相同, $X$  轴与  $Y$  轴方向位移误差基本为 0, $Z$  轴方向位移在  $t = 0$  时最大,这是由于动平台静止时,中心点的实际位置与期望位置不同造成的。

位置跟踪均方根误差如表 1 所示。

表 1 位置跟踪均方根误差

| 坐标轴 | 均方根误差/mm               |
|-----|------------------------|
| $X$ | $1.267 \times 10^{-2}$ |
| $Y$ | $6.165 \times 10^{-4}$ |
| $Z$ | $7.860 \times 10^{-2}$ |

从表 1 可以看出:(1) 在  $Z$  轴方向坐标的均方根误差值最大,但仅为  $7.860 \times 10^{-2} \text{ mm}$ ,能满足大多数的应用需求;(2) 说明了其控制性能良好。

主动件角位移跟踪误差如图 6 所示。

从图 6 可以看出:主动件实际角位移与期望角位移基本相同,误差的数量级完全可以满足大多数工业的需求。

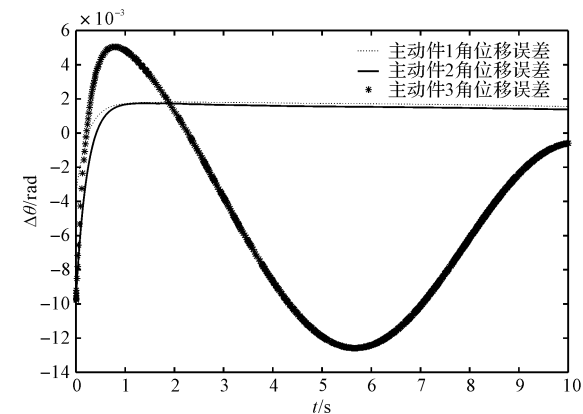


图 6 主动件角位移跟踪误差

角位移跟踪均方根误差如表 2 所示。

表 2 角位移跟踪均方根误差

| 主动件 | 均方根误差/rad              |
|-----|------------------------|
| 1   | $1.866 \times 10^{-3}$ |
| 2   | $2.696 \times 10^{-3}$ |
| 3   | $6.250 \times 10^{-2}$ |

从表 2 可以看出:(1) 主动件 3 的均方根误差值最大为  $6.250 \times 10^{-2}$  rad,可以满足使用需求;(2) 说明了仿真平台有效性,控制策略性能良好。

5 结束语

为了解决传统 3-RRS 并联机构在运动时,主动件向机构外部转动占据外部空间的问题,本文设计了一种紧凑型 3-RRS 并联机构,使机构运动时,主动件可向机构内部转动;基于 SimMechanics 工具箱建立了机构仿真模型,验证了该并联机构运动学分析的正确性,同时实现了机构运行的可视化;利用 Simulink/SimMechanics 搭建了该并联机构的控制仿真平台,拥有对期望轨迹良好跟踪的性能。

本文提出的利用位置跟踪、角度、角速度跟踪均方根误差来评判并联机构控制策略的优劣,对于研究其他并联机构控制的效果具有一定借鉴意义。

参考文献 (References) :

[1] 刘善增,余跃庆,刘庆波,等. 3-RRS 并联机器人的动力学

分析[J]. 中国机械工程,2008,19(15):1778-1781.

[2] 胡 峰,骆德渊,雷 霆,等. 基于 Simulink/SimMechanics 的三自由度并联机器人控制系统仿真[J]. 自动化仪表,2012,163(5):221-223.

[3] 朱大昌,严智敏,崔祥府,等. 基于螺旋理论对 3-RPS 并联机器人运动学分析及仿真[J]. 机械科学与技术,2013,32(1):28-31.

[4] HUNT K H. Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms[J]. **Transasme J of Mechanisms Transmissions and Automation in Design**,1983,105(4):705-712.

[5] 罗二娟. 耦合型 3 自由度并联舰载稳定平台研究[D]. 秦皇岛:燕山大学机械工程学院,2011.

[6] 董庆江. 3-RPS 并联机构在追日光伏中的应用研究[D]. 武汉:武汉纺织大学机械工程与自动化学院,2016.

[7] CLAVEL R. A fast robot with parallel geometry[C]. Proc. Int. Symposium on Industrial Robots, Lausanne: ISIR, 1988.

[8] KAROUNIA M, HERVE J M. An orientational 3-dof parallel mechanism[C]. Proceedings of the 3rd Chemnitz Parallel Kinematics Seminar, Chemnitz:Fraunhofer IWU,2002.

[9] 马春生,汪 辉,李瑞琴,等. 一种 3-RRS 并联机构位置分析的代数消元法[J]. 机械设计与研究,2016,32(4):5-9.

[10] 毕亚东. 基于螺旋理论的 3-RRS 并联机器人运动学分析[J]. 郑州轻工业学院学报:自然科学版,2013,28(6):67-72.

[11] TETIK H, KALLA R, KIPER G, et al. Position kinematics of 3-RRS parallel manipulator[C]. CISM IFToMM Symposium on Robot Design Dynamics and Control, Udine: Springer, 2016.

[12] LI J, WANG J, CHOU W, et al. Inverse kinematics and dynamics of 3-RRS parallel platform[C]. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Seoul: IEEE Computer Society, 2001.

[13] 郭 玉,李 彬,赵新华. 3-RRS 并联机构运动学传动性能分析[J]. 机械设计,2015,32(3):72-76.

[14] 须 颖,徐福红,邵 萌. Stewart 平台的 SimMechanics 仿真[J]. 沈阳建筑大学学报:自然科学版,2017,32(5):906-913.

[编辑:程 浩]

本文引用格式: