

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2018.01.017

基于输入时延的线性连续时不变系统 量化分析与控制*

陈俊, 陈海飞, 高金凤*

(浙江理工大学机械与自动控制学院, 浙江 杭州 310018)

摘要: 针对网络控制系统中同时存在的网络诱导时延和量化误差问题, 对系统的建模、稳定性分析、控制器设计等 3 个方面进行了研究。基于量化反馈控制器和零阶保持器的工作机制, 利用了扇形界方法, 将系统建模为带有输入时延的时滞系统。其中, 在网络控制系统的传感器到控制器通道(S-C)和控制器到执行器通道(C-A)分别加入了对量化器, 用来量化系统的状态信号和控制输入信号。运用 Lyapunov 理论提出了一种 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法, 并得到了相应的稳定性判据, 该判据是以两个线性矩阵不等式(LMIs)来表示的。基于该稳定性判据, 设计了量化状态反馈控制器使得闭环系统渐近稳定。研究结果表明: 两个量化器的量化密度直接影响系统的控制性能。

关键词: 网络控制系统; 网络诱导时延; 量化反馈控制; 稳定性分析; 扇形界方法

中图分类号: TP273

文献标志码: A

文章编号: 1001-4551(2018)01-0089-06

Quantized analysis and control of continuous linear time invariant system based on input delay

CHEN Jun, CHEN Hai-fei, GAO Jin-feng

(School of Mechanical Engineering and Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Aiming at the stabilization of networked control systems(NCSs) subject to both network-induced delays and data quantization error, the three aspects of system modeling, stability analysis and controller design were studied respectively. Based on logarithmic quantized feedback controller and the working mechanism of zero-order hold(ZOH), utilizing sector bound approach, the NCSs was modeled as a time-delay system with input delay. Among them, both sensor-to-controller(S-C) channel and controller-to-actuator(C-A) channel of NCSs was separately jointed the logarithmic quantizer, to quantify system state signal and control input signal respectively. By utilizing the Lyapunov stability theory to propose a kind of Lyapunov-Krasoskii function, then the corresponding stability condition was obtained, this condition was described by two sets of linear matrix inequalities(LMIs). Based on this stability condition, the corresponding quantized feedback controller was designed to guarantee the closed-loop systems stochastic stable. The results indicate that the density of two quantizers directly affect the control performance of the system.

Key words: networked control systems(NCSs); network-induced delays; quantized feedback control; stabilization; sector bound approach

0 引言

网络控制系统是一种将空间分布的多个系统元件如: 传感器、执行器、控制器等控制节点通过数字通信网

络连接的闭环反馈控制系统^[1]。由于控制系统回路中通信网络的介入, 不可避免地将网络其本身带宽有限等特性引入到控制系统中, 必须设计出先进的控制策略。

针对时延和丢包控制问题, LI 等^[2]提出了一种改进的依赖时延上界和丢包上界的稳定性判据; XIE

收稿日期: 2017-04-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61374083); 浙江省科学技术资助项目(2014C31082)

作者简介: 陈俊(1991-), 男, 江苏扬州人, 硕士研究生, 主要从事网络控制系统方面的研究。E-mail: chenjun846259@163.com

通信联系人: 高金凤, 女, 教授, 硕士生导师。E-mail: gaojf163@163.com

等^[3]将通信受限的 NCSs 建模成具有输入时延的离散时间切换系统,通过求解一组线性矩阵不等式(LMIs)获得了系统的稳定性条件;ZHANG 等^[4]基于 Markov 建模方法,将传感器到控制器和控制器到执行器的两段传输时延分别建模成两个 Markov 链,并分析了闭环系统的随机稳定性。与此同时,Zhang 等^[5]考虑了一类时变时延小于一个采样周期的 NCSs,进而将系统描述成离散时间切换系统,设计了相应的 H_∞ 控制器使系统达到指数均方稳定和指定的 H_∞ 性能,并建立了时延长度,时延变化频率和闭环系统性能的关系。

另一方面,在接收端恢复出信号与原信号有一定的误差。早期 ELIA 等^[6]指出在单输入单输出的离散线性时不变系统中,对数量化器是最粗糙的量化器,得到了系统稳定的最小量化密度跟系统自身的不稳定极点有关,QU 等^[7]研究了离散线性无线网络控制系统的稳定性,基于 Markov 跳变系统,将系统稳定性转化为一个等价的不确定系统的鲁棒稳定性问题;JIANG 等^[8]同时考虑了网络诱导时延,数据包任意丢失,量化的影响,基于已知的丢包概率,时延的上下界和量化密度,设计了统一的控制率。以上文献都是考虑了传感器对被控对象采样的状态信息传输到控制器端的量化情况,而在实际系统中,控制器的输出信号在送到执行器端前也同样需要量化。

本研究将对系统建模、稳定性分析及控制器设计 3 个方面进行研究。

1 系统建模

考虑被控对象为线性时不变系统,其状态方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x(t)$ —被控系统的状态向量 $x(t) \in \mathbf{R}^n$; $u(t)$ —控制输入, $u(t) \in \mathbf{R}^p$; $y(t)$ —被控输出, $y(t) \in \mathbf{R}^r$;A, B, C—具有适当维数的常数矩阵。

具有时延和量化的网络控制系统的结构如图 1 所示。

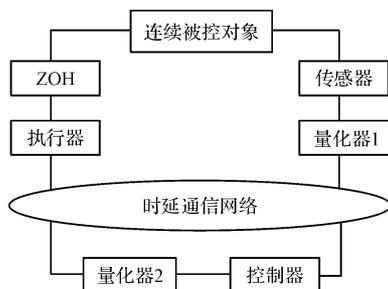


图 1 具有时延和量化的网络控制系统的结构

为了不失一般性,对 NCSs 作如下假设:

假设 1:网络时延在两个通道中都存在,用 $u(t^+) =$

$Kx(t - \tau_{sc}(k))$ 表示传感器到控制器时延,用 $u(t^+) = Kx(t - \tau_{sc}(k))$ 表示控制器到执行器时延,两部分的总时延用 $u(t^+) = Kx(t - \tau_{sc}(k))$ 表示,即 $u(t^+) = Kx(t - \tau_{sc}(k))$ 。 $u(t^+) = Kx(t - \tau_{sc}(k))$ 是有界的,即 $\eta_m \leq \tau(k) \leq \eta_M, u(t^+) = Kx(t - \tau_{sc}(k))$ 。

假设 2:数据在每个采样周期内以单包的形式传输。传感器是时钟驱动,而控制器和执行器都是事件驱动。

假定被控系统的状态都是可观测的,则可以使用闭环状态反馈控制器:

$$u(t^+) = Kx(t - \tau_{sc}(k)), k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

式中: K —状态反馈增益。

由于通信网络中存在网络诱导时延和数据包丢失的问题,将式(2)代入式(1)中得到:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(i_k h) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3)$$

式中: $t \in [i_k h + \tau(k), i_{k+1} h + \tau(k+1)]$; h —采样周期; $x(i_k h)$ —系统状态 $x(t)$ 在采样时刻 $i_k h$ 经传感器检测出的信号。

由于零阶保持器(ZOH)的工作机制^[9], $u(i_k h)$ 在采样时刻 $i_k h$ 总是接收最新的控制信号以保证系统的实时性,又因为 $x(i_k h) = x(t - (t - i_k h))$,令 $\eta(t) = t - i_k h$,其中, $t \in [i_k h + \tau(k), i_{k+1} h + \tau(k+1)]$,根据假设 1 可知, $\eta_m \leq (i_{k+1} h - i_k h) + \tau(k+1) \leq \eta_M$,所以 $\eta(t)$ 也是有界的,即 $\eta_m \leq \eta(t) \leq \eta_M$ 。结合式(1~3),并用 $t - \eta(t)$ 代替 $i_k h$,于是式(3)可以表示为:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t - \eta(t)) \quad (4)$$

其中: $t \in [i_k h + \tau(k), i_{k+1} h + \tau(k+1)]$, $\eta_m \leq \eta(t) \leq \eta_M$ 。

考虑到前馈通道和反馈通道分别加入量化器后,量化器 $g(\cdot)$ 和 $f(\cdot)$ 分别量化状态信号和控制信号,量化器与其两端的输入输出关系描述如下:

$$v(t) = Kg(x(i_k h)) \quad (5)$$

$$u(t) = f(v(t)) \quad (6)$$

量化器 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 定义为:

$$f(v) = [f_1(v_1), f_2(v_2), \dots, f_p(v_p)]^T \quad (7)$$

$$g(x) = [g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_n(x_n)]^T \quad (8)$$

其中: $f_i(\cdot)$ 和 $g_j(\cdot)$ ($i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, n$) 是对称的,即 $f_i(-v_i) = -f_i(v_i)$ 和 $g_j(-x_j) = -g_j(x_j)$,本文选取 $f_i(\cdot)$ 和 $g_j(\cdot)$ 为对数量化器。

定义 1^[10]:一个量化器被称为对数量化器,它的量化级数的集合为:

$$U = \{\pm u_i : u_i = \rho^i u_0, i = \pm 1, \pm 2, \dots\} \cup \{\pm u_0\} \cup \{0\}, 0 < \rho < 1, u_0 > 0 \quad (9)$$

$$\text{映射关系 } f(v) = \begin{cases} u_i, & \text{if } v > 0, \frac{1}{1+\delta}u_i < v \leq \frac{1}{1-\delta}u_i \\ 0, & \text{if } v = 0 \\ -f(-v), & \text{if } v < 0 \end{cases},$$

定义为:

$$f(v) = \begin{cases} u_i, & \text{if } v > 0, \frac{1}{1+\delta}u_i < v \leq \frac{1}{1-\delta}u_i \\ 0, & \text{if } v = 0 \\ -f(-v), & \text{if } v < 0 \end{cases} \quad (10)$$

其中:

$$\delta = \frac{1-\rho}{1+\rho} \quad (11)$$

定义 2: 用 $\#g[\varepsilon]$ 表示在区间 $[\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}]$ 中量化级数,

量化器 $f(\cdot)$ 的密度定义为:

$$\eta_f = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\#g[\varepsilon]}{-\ln \varepsilon} \quad (12)$$

利用扇形界方法可将 $f_i(\cdot)$ 和 $g_j(\cdot)$ 表示为^[11]:

$$f_i(v_i) = (1 + \Delta_{f_i}(v_i))v_i, \quad |\Delta_{f_i}(v_i)| \leq \delta_{f_i} \quad (13)$$

$$g_j(x_j) = (1 + \Delta_{g_j}(x_j))x_j, \quad |\Delta_{g_j}(x_j)| \leq \delta_{g_j} \quad (14)$$

于是量化器 $f_i(\cdot)$ 和 $g_j(\cdot)$ 可以表示为:

$$f(v) = (\mathbf{I} + \Delta_f)v \quad (15)$$

$$g(x) = (\mathbf{I} + \Delta_g)x \quad (16)$$

其中: 令 $\Delta_f = \Delta_{f_i}, \Delta_g = \Delta_{g_j}, \mathbf{I}$ 为适当维数的单位阵。根据式(1 ~ 4, 15 - 16) 得到系统的控制输入为:

$$u(t) = (\mathbf{I} + \Delta_f)\mathbf{K}(\mathbf{I} + \Delta_g)\mathbf{x}(i_k h) = (\mathbf{K} + \Delta(\mathbf{K}))\mathbf{x}(i_k h) \quad (17)$$

其中, $\Delta(\mathbf{K}) = \Delta_f\mathbf{K} + \mathbf{K}\Delta_g + \Delta_f\mathbf{K}\Delta_g$ 。结合式(4)和式(17)得到:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{K} + \Delta(\mathbf{K}))\mathbf{x}(t - \eta(t)) \quad (18)$$

其中: $t \in [i_k h + \tau(k), i_{k+1} h + \tau(k+1)]$ 。

引理 1^[12]: 对于给定的适当维数的对称正定矩阵 $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T, \mathbf{W} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和标量 $\gamma > 0$, 向量函数 $\dot{\mathbf{x}}: [-\gamma, 0] \rightarrow \mathbf{R}^n$, 有下面的不等式成立:

$$-\gamma \int_{-\gamma}^0 \dot{\mathbf{x}}^T(t + \theta) \mathbf{W} \dot{\mathbf{x}}(t + \theta) d\theta \leq [\mathbf{x}^T(t) \quad \mathbf{x}^T(t - \gamma)] \begin{pmatrix} -\mathbf{W} & \mathbf{W} \\ \mathbf{W} & -\mathbf{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t - \gamma) \end{pmatrix} \quad (19)$$

引理 2^[12]: 对于给定的具有适当维数的矩阵 Ω_1, Ω_2 和 $\Psi, \sigma(t)$ 是关于 t 的函数, 且满足 $0 \leq \sigma_m \leq \sigma(t) \leq \sigma_M$, 则: $(\sigma(t) - \sigma_m)\Omega_1 + (\sigma_M - \sigma(t))\Omega_2 + \Psi < 0$ 成立当且仅当: $(\sigma_M - \sigma_m)\Omega_1 + \Psi < 0, (\sigma_M - \sigma_m)\Omega_2 + \Psi < 0$ 。

引理 3^[13]: 对于给定的适当维数的实矩阵 \mathbf{D}, \mathbf{E} 和 \mathbf{F} 且满足 $\|\mathbf{F}\| \leq 1$, 则对任意给定的变量 $\varepsilon > 0$, 有下面的不等式成立:

$$\mathbf{D}\mathbf{E}\mathbf{F} + \mathbf{E}^T\mathbf{F}^T\mathbf{D}^T \leq \varepsilon^{-1}\mathbf{D}\mathbf{D}^T + \varepsilon\mathbf{E}^T\mathbf{E} \quad (20)$$

2 稳定性分析

定理 1 给出了其渐近稳定的一个判据, 为接下来的控制器设计提供了理论基础。

定理 1: 给定状态反馈增益矩阵 \mathbf{K} 和标量常数 η_m , η_M , 如果存在适当维数的对称正定矩阵 $\mathbf{P} > 0, \mathbf{T}_i > 0, \mathbf{M}_i > 0 (i = 1, 2)$ 和普通矩阵 \mathbf{S}, \mathbf{N} 满足式(21 ~ 22), 则闭环控制系统(18) 是渐近稳定的。

$$\begin{pmatrix} \Omega + \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_1^T & * \\ (\eta_M - \eta_m)^{\frac{1}{2}}\mathbf{S}^T & -\mathbf{M}_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} \Omega + \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_1^T & * \\ (\eta_M - \eta_m)^{\frac{1}{2}}\mathbf{N}^T & -\mathbf{M}_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (22)$$

其中:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Xi_1 & * & * & * & * \\ \mathbf{M}_1 & -\mathbf{M}_1 - \mathbf{T}_1 & * & * & * \\ \Xi_5 & 0 & \Xi_2 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{T}_2 & * \\ \Xi_6 & 0 & \Xi_4 & 0 & \Xi_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W}_1 = [0 \quad \mathbf{S} \quad -\mathbf{S} + \mathbf{N} \quad -\mathbf{N} \quad 0]$$

$$\Xi_1 = \mathbf{Z}_1\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{Z}_1^T + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 - \mathbf{M}_1$$

$$\Xi_2 = \mathbf{Z}_2\mathbf{B}[\mathbf{K} + \Delta(\mathbf{K})] + [\mathbf{K} + \Delta(\mathbf{K})]^T\mathbf{B}^T\mathbf{Z}_2^T$$

$$\Xi_3 = -\mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_3^T + \eta_m^2\mathbf{M}_1 + (\eta_M - \eta_m)\mathbf{M}_2$$

$$\Xi_4 = -\mathbf{Z}_2^T + \mathbf{Z}_3\mathbf{B}[\mathbf{K} + \Delta(\mathbf{K})]$$

$$\Xi_5 = [\mathbf{K} + \Delta(\mathbf{K})]^T\mathbf{B}^T\mathbf{Z}_1^T + \mathbf{Z}_2\mathbf{A}$$

$$\Xi_6 = \mathbf{P} - \mathbf{Z}_1^T + \mathbf{Z}_3\mathbf{A}$$

证明: 选取的 Lyapunov-Krasovskii 泛函形式:

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_1(t) + \mathbf{V}_2(t) + \mathbf{V}_3(t)$$

其中:

$$\mathbf{V}_1(t) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{V}_2(t) = \int_{t-\eta_m}^t \mathbf{x}^T(s)\mathbf{T}_1\mathbf{x}(s) ds + \int_{t-\eta_M}^t \mathbf{x}^T(s)\mathbf{T}_2\mathbf{x}(s) ds$$

$$\mathbf{V}_3(t) = \eta_m \int_{t-\eta_m}^t \int_s^t \dot{\mathbf{x}}^T(\theta)\mathbf{M}_1\dot{\mathbf{x}}(\theta) d\theta ds + \int_{t-\eta_M}^t \mathbf{x}^T(s)\mathbf{T}_2\mathbf{x}(s) ds$$

分别对 $\dot{\mathbf{V}}_1(t) = \dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(t) = 2\dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{V}}_2(t) = \dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(t) = 2\dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{V}}_3(t) = \dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(t) = 2\dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$ 求时间导数:

$$\dot{\mathbf{V}}_1(t) = \dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(t) = 2\dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{V}}_2(t) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{T}_1\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t - \eta_m)\mathbf{T}_1\mathbf{x}(t - \eta_m) +$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}^T(t) \mathbf{T}_2 \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t - \eta_M) \mathbf{T}_2 \mathbf{x}(t - \eta_M) \\ \dot{\mathbf{V}}_3(t) = & \eta_m^2 \dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{x}}(t) + (\eta_M - \eta_m) \dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{x}}(t) - \\ & \eta_m \int_{t-\eta_m}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds - \int_{t-\eta_M}^{t-\eta_m} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds + \\ & 2\boldsymbol{\varphi}^T(t) \mathbf{S} [\mathbf{x}(t - \eta_m) - \mathbf{x}(t - \eta(t)) - \\ & \int_{t-\eta(t)}^{t-\eta_m} \dot{\mathbf{x}}(s) ds] + 2\boldsymbol{\varphi}^T(t) \mathbf{N} [\mathbf{x}(t - \eta(t)) - \\ & \mathbf{x}(t - \eta_M) - \int_{t-\eta_M}^{t-\eta(t)} \dot{\mathbf{x}}(s) ds] \end{aligned}$$

其中, $\boldsymbol{\varphi}^T(t) = [\mathbf{x}^T(t) \quad \mathbf{x}^T(t - \eta_m) \quad \mathbf{x}^T(t - \eta(t)) \quad \mathbf{x}^T(t - \eta_M) \quad \dot{\mathbf{x}}^T(t)]$, 由此引入的矩阵 \mathbf{S} 和 \mathbf{N} 是适当维数的自由矩阵。由引理 1 可得:

$$\begin{aligned} -\eta_m \int_{t-\eta_m}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{x}}(s) ds \leq & \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t - \eta_m) \end{pmatrix}^T \\ & \begin{pmatrix} -\mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_1 & -\mathbf{M}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t - \eta_m) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

另外, 其中两项:

$$\begin{aligned} -2\boldsymbol{\varphi}^T(t) \mathbf{S} \int_{t-\eta(t)}^{t-\eta_m} \dot{\mathbf{x}}(s) ds \leq & (\eta(t) - \eta_m) \boldsymbol{\varphi}^T \\ & (t) \mathbf{S} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\varphi}(t) + \int_{t-\eta(t)}^{t-\eta_m} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} -2\boldsymbol{\varphi}^T(t) \mathbf{N} \int_{t-\eta_M}^{t-\eta(t)} \dot{\mathbf{x}}(s) ds \leq & (\eta_M - \eta(t)) \boldsymbol{\varphi}^T \\ & (t) \mathbf{N} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varphi}(t) + \int_{t-\eta_M}^{t-\eta(t)} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds \end{aligned} \quad (25)$$

结合式(23 ~ 25) 可得:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}(t) = & \dot{\mathbf{V}}_1(t) + \dot{\mathbf{V}}_2(t) + \dot{\mathbf{V}}_3(t) \leq \\ & 2\dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2) \mathbf{x}(t) - \\ & \mathbf{x}^T(t - \eta_m) \mathbf{T}_1 \mathbf{x}(t - \eta_m) - \\ & \mathbf{x}^T(t - \eta_M) \mathbf{T}_2 \mathbf{x}(t - \eta_M) + \eta_m^2 \dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{x}}(t) + \\ & (\eta_M - \eta_m) \dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{x}}(t) - \\ & (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \eta_m))^T \mathbf{M}_1 (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \eta_m)) - \\ & \int_{t-\eta_m}^{t-\eta_M} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds + \\ & 2\boldsymbol{\varphi}^T(t) \mathbf{S} (\mathbf{x}(t - \eta_m) - \mathbf{x}(t - \eta(t))) + \\ & (\eta(t) - \eta_m) \boldsymbol{\varphi}^T(t) \mathbf{S} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\varphi}(t) + \\ & \int_{t-\eta(t)}^{t-\eta_m} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds + \\ & 2\boldsymbol{\varphi}^T(t) \mathbf{N} (\mathbf{x}(t - \eta(t)) - \mathbf{x}(t - \eta_M)) + \\ & (\eta_M - \eta(t)) \boldsymbol{\varphi}^T(t) \mathbf{N} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\varphi}(t) + \\ & \int_{t-\eta_M}^{t-\eta(t)} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{x}}(s) ds = \\ & \boldsymbol{\varphi}^T(t) [\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_1^T + (\eta(t) - \eta_m) \mathbf{S} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{S}^T + \\ & (\eta_M - \eta(t)) \mathbf{N} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{N}^T] \boldsymbol{\varphi}(t) \end{aligned} \quad (26)$$

根据引理 2, 要使得 $\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_1^T + (\eta(t) - \eta_m) \mathbf{S} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{S}^T + (\eta_M - \eta(t)) \mathbf{N} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{N}^T < 0$ 满足, 先令 $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_1^T$, 当且仅当以下两个不等式成立: $\boldsymbol{\Phi} + (\eta_M$

$- \eta_m) \mathbf{S} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{S}^T < 0, \boldsymbol{\Phi} + (\eta_M - \eta_m) \mathbf{N} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{N}^T < 0$ 。再利用 Schur 补引理可知, 只要式(19 - 20) 成立, 等价于 $\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_1^T + (\eta(t) - \eta_m) \mathbf{S} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{S}^T + (\eta_M - \eta(t)) \mathbf{N} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{N}^T < 0$ 成立, 从而得到 $V(t) < 0$ 也成立, 所以当 $t \in [i_k h + \tau(k), i_{k+1} h + \tau(k+1)]$ 时, 闭环控制系统(18) 是渐近稳定的。

注释 1: 在以往许多文献中^[14], 一般选取的 Lyapunov-Krasovskii 泛函中都会包含这一项, 即 $\mathbf{V}_1(t) = \int_{t-\eta_M}^t \int_s^t \dot{\mathbf{x}}^T(\theta) \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}(\theta) d\theta ds$, 对其进行求导时, 常常将 $-\int_{t-\eta_M}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}(s) ds$ 放大到 $-\int_{t-\eta(t)}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}(s) ds$, 但由于 $-\int_{t-\eta(t)}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}(s) ds = -\int_{t-\eta_M}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}(s) ds + \int_{t-\eta_M}^{t-\eta(t)} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}(s) ds$, 其中一些有效的信息项 $\int_{t-\eta_M}^{t-\eta(t)} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}(s) ds$ 被忽略掉了, 这必然会导致分析结果的保守性。由此可见, 将时变时延 $\eta(t)$ 放大到其上界 η_M 是引起分析结果保守性的重要原因之一。在定理 1 的证明过程中, 通过选取 Lyapunov-Krasovskii 泛函和引入适当维数的自由矩阵, 巧妙运用矩阵函数的凸性, 这样就不需要将 $\eta(t)$ 放大到其上界 η_M , 而不丢掉任何有效的信息。如对时变时延项的处理 $(\eta(t) - \eta_m) \mathbf{S} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{S}^T + (\eta_M - \eta(t)) \mathbf{N} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{N}^T$, 如果利用之前的方法, 会将其放大到 $(\eta_M - \eta_m) \mathbf{S} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{S}^T + (\eta_M - \eta_m) \mathbf{N} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{N}^T$, 而在本研究中利用两个等价的不等式来代替原来的不等式, 这样就避免了放大, 从而不会丢掉任何有效的信息, 减少了分析结果的保守性。

由于 $\Delta(\mathbf{K}) = \Delta_f \mathbf{K} + \mathbf{K} \Delta_g + \Delta_f \mathbf{K} \Delta_g$ 是以非线性的形式存在的, 其中的 Δ_f 和 Δ_g 为两个不确定项, $\Delta(\mathbf{K})$ 也是不确定的, 无法直接用 Matlab 中的 LMI 工具箱求解, 所以本研究应用常见处理不确定项的方法, 将其转化成如下形式。定理 2 给出了处理不确定项 $\Delta(\mathbf{K})$ 的具体过程。

定理 2: 给定反馈增益矩阵 \mathbf{K} 和标量常数 η_m, η_M , 如果存在适当维数的对称正定矩阵 $\mathbf{P} > 0, \mathbf{T}_i > 0, \mathbf{M}_i > 0 (i = 1, 2)$ 和普通矩阵 \mathbf{S}, \mathbf{N} 以及变量 $\varepsilon_k (k = 1, 2, 3)$ 满足式(27 ~ 28) 则闭环控制系统(18) 是渐近稳定的。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{11} + \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_1^T & * & * \\ (\eta_M - \eta_m)^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}^T & -\mathbf{M}_2 & * \\ \boldsymbol{\Omega}_{31} & 0 & \boldsymbol{\Omega}_{33} \end{pmatrix} < 0 \quad (27)$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{11} + \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_1^T & * & * \\ (\eta_M - \eta_m)^{\frac{1}{2}} \mathbf{N}^T & -\mathbf{M}_2 & * \\ \boldsymbol{\Omega}_{31} & 0 & \boldsymbol{\Omega}_{33} \end{pmatrix} < 0 \quad (28)$$

其中:

$$\Omega_{11} = \begin{pmatrix} \Xi_1 & * & * & * & * \\ M_1 & -M_1 - T_1 & * & * & * \\ \Xi_4 & 0 & Z_2BK + K^T B^T Z_2^T & * & * \\ 0 & 0 & 0 & -T_2 & * \\ \Xi_5 & 0 & -Z_2^T + Z_3BK & 0 & \Xi_3 \end{pmatrix}$$

$$W_1 = [0 \quad S \quad -S + N \quad -N \quad 0]$$

$$\Xi_1 = Z_1A + A^T Z_1^T + T_1 + T_2 - M_1$$

$$\Xi_3 = -Z_3 - Z_3^T + \eta_m^2 M_1 + (\eta_M - \eta_m)M_2$$

$$\Omega_{31} = [Q \quad \varepsilon_1 Q_L^T \quad Q \quad \varepsilon_2 Q_L^T \quad Q \quad \varepsilon_3 Q_L^T]^T$$

$$\Omega_{33} = \text{diag} \left\{ \frac{-\varepsilon_1}{\delta_f^2 I} - \varepsilon_1 I \quad -\varepsilon_2 I \quad \frac{-\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_3}{\delta_g^2 I} \quad \frac{-\varepsilon_3}{\delta_f^2 I} \quad \frac{-\varepsilon_3}{\delta_g^2 I} \right\}$$

$$\Xi_4 = Z_2A + K^T B^T Z_1^T$$

$$\Xi_5 = P - Z_1^T + Z_3A$$

$$Q^T = [B^T Z_1^T \quad 0 \quad B^T Z_2^T \quad 0 \quad B^T Z_3^T]$$

$$Q_L = [0 \quad 0 \quad K \quad 0 \quad 0]$$

证明:将定理 1 中的 Ω 作如下形式改写:

$$\Omega = \Omega_{11} + Q\Delta_f Q_L + Q_L^T \Delta_f Q^T + QKQ_g + Q_g^T K^T Q^T + Q\Delta_g KQ_g + Q_g^T K^T \Delta_g Q^T \quad (29)$$

应用引理 3 可知,存在 $\varepsilon_k (k = 1, 2, 3)$ 使得下列不等式成立:

$$\Omega \leq \Omega_{11} + \varepsilon_1 Q_L^T Q_L + \varepsilon_1^{-1} Q\Delta_f^2 Q^T + \varepsilon_2^{-1} QQ^T + \varepsilon_2 Q_L^T \Delta_f^2 Q_L + \varepsilon_3^{-1} Q\Delta_g^2 Q^T + \varepsilon_3 Q_L^T \Delta_g^2 Q_L \quad (30)$$

其中: $\Delta_f^2 \leq \delta_f^2 I, \Delta_g^2 \leq \delta_g^2 I$ 。利用 Schur 补引理,结合式(19, 20, 27, 28)可知,若式(25 ~ 26)恒成立,则闭环控制系统(18)是渐近稳定的。

3 控制器设计

根据定理 1 和定理 2,设计状态反馈控制器使得闭环系统(18)渐近稳定。下面给出量化反馈控制器的设计方法。

定理 3:对于给定的标量 $\eta_m, \eta_M (0 < \eta_m < \eta_M)$ 和两个常数 α_1 和 α_2 , 如果存在适当维数的对称正定矩阵 $\bar{P} > 0, \bar{T}_i > 0, \bar{M}_i > 0 (i = 1, 2)$ 和普通矩阵 $\bar{S}, \bar{N}, \Theta, F$ 以及变量 $\theta_j > 0 (j = 1, 2, 3)$ 满足式(31, 32), 则闭环控制系统(18)是渐近稳定的。

$$\begin{pmatrix} \Omega_{11} + \bar{W}_1 + \bar{W}_1^T & * & * \\ (\eta_M - \eta_m)^{\frac{1}{2}} \bar{S}^T & -\bar{M}_2 & * \\ \bar{\Omega}_{31} & 0 & \bar{\Omega}_{33} \end{pmatrix} < 0 \quad (29)$$

$$\begin{pmatrix} \Omega_{11} + \bar{W}_1 + \bar{W}_1^T & * & * \\ (\eta_M - \eta_m)^{\frac{1}{2}} \bar{N}^T & * & * \\ \bar{\Omega}_{31} & 0 & \bar{\Omega}_{33} \end{pmatrix} < 0 \quad (30)$$

其中:

$$\bar{\Omega}_{11} = \begin{pmatrix} \bar{\Xi}_1 & * & * & * & * \\ \bar{M}_1 & -\bar{M}_1 - \bar{T}_1 & * & * & * \\ \bar{\Xi}_4 & 0 & \alpha_1 BF + \alpha_1 F^T B^T & * & * \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{T}_2 & * \\ \bar{\Xi}_5 & 0 & \alpha_2 BF - \alpha_1 \Theta & 0 & \bar{\Xi}_3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{W}_1 = [0 \quad \bar{S} \quad -\bar{S} + \bar{N} \quad -\bar{N} \quad 0]$$

$$\bar{\Xi}_1 = A\Theta^T + \Theta A^T + \bar{T}_1 + \bar{T}_2 - \bar{M}_1$$

$$\bar{\Xi}_3 = -\alpha_2 \Theta - \alpha_2 \Theta^T + \eta_m^2 \bar{M}_1 + (\eta_M - \eta_m) \bar{M}_2$$

$$\bar{\Xi}_4 = \alpha_1 A\Theta^T + F^T B^T$$

$$\bar{\Xi}_5 = \bar{P} - \Theta + \alpha_2 A\Theta^T$$

$$\bar{\Omega}_{31} = [\theta_1 \bar{Q} \bar{Q}_L^T \quad \theta_2 \bar{Q} \bar{Q}_L^T \quad \theta_3 \bar{Q} \bar{Q}_L^T]^T$$

$$\bar{\Omega}_{33} = \text{diag} \left\{ \frac{-\theta_1}{\delta_f^2 I} - \theta_1 I \quad -\theta_2 I \quad \frac{-\theta_2 - \theta_3 - \theta_3}{\delta_g^2 I} \quad \frac{-\theta_3}{\delta_f^2 I} \quad \frac{-\theta_3}{\delta_g^2 I} \right\}$$

$$\bar{Q}^T = [B^T \quad 0 \quad \alpha_1 B^T \quad 0 \quad \alpha_2 B^T]$$

$$\bar{Q}_L^T = [0 \quad 0 \quad F \quad 0 \quad 0]$$

证明:令 $Z_1 = \Theta^{-1}, Z_2 = \alpha_1 \Theta^{-1}, Z_3 = \alpha_2 \Theta^{-1}, A_1 = \text{diag} \{J \quad \Theta \quad I \quad I \quad I \quad I \quad I \quad I\}$ 。并对式(27)和式(28)两边同时左乘右乘 A_1 和它的转置 A_1^T , 即可得到一个新的矩阵式, 再定义 $\bar{P} = \Theta P \Theta^T, \bar{T}_i = \Theta T_i \Theta^T, \bar{M}_i = \Theta M_i \Theta^T (i = 1, 2), J = \text{diag} \{ \Theta \quad \Theta \quad \Theta \quad \Theta \quad \Theta \}$, $\bar{S} = JS\Theta^T, \bar{N} = JN\Theta^T$ 和 $\theta_k = \varepsilon_k^{-1} (k = 1, 2, 3)$, 并根据 Schur 补引理, 即可得到式(32), 且控制器状态反馈增益为 $K = F\Theta^{-T}$ 。

证毕。

注释 2:从定理 3 中可以看出线性矩阵不等式(29 ~ 30)的可行性解不仅与网络诱导时延的上下界 η_m, η_M 有关, 还与两个量化器的量化参数 δ_f, δ_g 有关, 根据式(11)可知, 两个量化器的量化密度 ρ_f, ρ_g 的大小直接影响线性矩阵不等式(31 ~ 32)的求解。

4 数值仿真示例

例 1:考虑如下线性系统:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6 \end{pmatrix} u(t)$$

同时选取两个量化器为对数量化器, 并选择适当的量化密度, 根据定理 3, 取常数 $\alpha_1 = 9.6, \alpha_2 = 8.0$, 对应有不同的量化密度 ρ_f 和 ρ_g 。

在不同的量化密度下, 系统的相关参数如表 1 所示。

表 1 不同量化密度下系统的相关参数比较

| $\rho_f = \rho_g$ | η_m | K^T |
|-------------------|----------|--------------------|
| 1.0 | 0.66 | $[-0.93, 2.86]^T$ |
| 0.8 | 0.48 | $[-1.14, -3.26]^T$ |
| 0.6 | 0.23 | $[-1.71, -5.06]^T$ |

从表 1 中可以看出:随着两个量化器的量化密度不断增大,网络诱导时延的上界也在增大,保证系统稳定的参数变化范围变大,系统的控制性能变好。对于给定系统的初始状态即 $\Psi(t) = [-1.5 \ 2]^T$ 得到系统的反馈增益 K , 取量化器密度 $\rho_f = \rho_g = 0.6, 0.8, 1.0$ 这 3 种情况分别进行仿真。

3 种量化密度下系统的状态响应如图 3 所示。

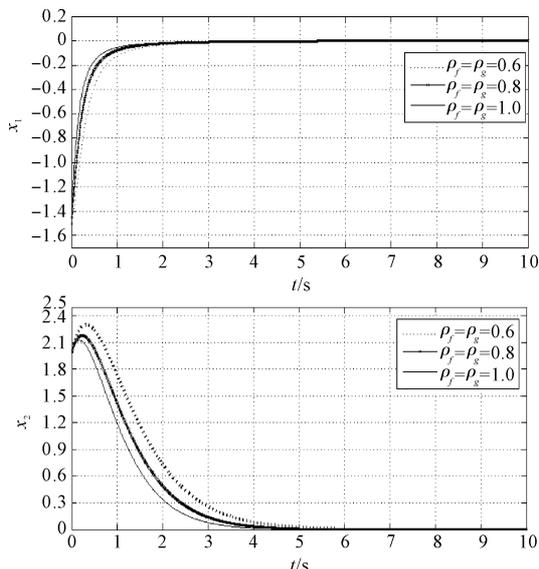


图 3 3 种量化密度下系统的状态响应

从图 3 可以看出:(1) 通过量化反馈控制器可以使系统渐近稳定;(2) 随着量化器的量化密度增大,量化器对信号的采样和量化越精细,对系统的信息了解越多,系统到达稳定状态的时间变短,则系统的控制性能变好。

5 结束语

本研究运用 Lyapunov 稳定性理论提出了一种基于时变时延依赖的 Lyapunov-Krasovskii 泛函,并得到了以两个线性矩阵不等式(LMIs)表示的稳定性判据;在不考虑外部干扰的情况下,设计了量化状态反馈控制器使得系统渐近稳定,并且得到系统的控制性能与量化器的量化密度 ρ_f 和 ρ_g 密切相关;最后给出的数值仿真实例验证了所提方法的有效性。

参考文献 (References) :

[1] 游科友,谢立华. 网络控制系统的最新研究综述[J]. 自动化学报,2013,39(2):101-118.

[2] LI H B, YANG H J, SUN F C, et al. A network-bound-dependent stabilization method of networked control systems [J]. **Automatica**,2013,49(8):2561-2566.

[3] XIE D, CHEN X, LV L, et al. Asymptotical stabilisability of networked control systems: time-delay switched system approach [J]. **IET Control Theory and Applications**, 2008,2(9):743-751.

[4] ZHANG L Q, SHI Y, CHEN T W, et al. A new method for stabilization of networked control systems with random delays [J]. **IEEE Transactions on Automatic Control**,2005,50(8):1177-1181.

[5] ZHANG W A, YU L, YIN S. A switched system approach to H_∞ control of networked control systems with time-varying delays [J]. **Journal of the Franklin Institute**, 2011, 348(2):165-178.

[6] ELIA N, MITTER K. Stabilization of linear systems with limited information [J]. **IEEE Transactions on Automatic Control**,2001,46(9):1384-1400.

[7] QU F L, HU B, GUAN Z H, et al. Quantized stabilization of wireless networked control systems with packet losses [J]. **ISA Transactions**,2016,6(4):92-97.

[8] JIANG S, FANG H J. Quantized stabilization of discrete-time systems in a networked environment [J]. **Applied Mathematical Modelling**,2014,38(5-6):1685-1697.

[9] FENG Yu, CHEN Xiang, GU Guo-xiang. Quantized feedback stabilizing control for multiple-input networked systems with multiplicative random noises: a stochastic approach [C]. American Control Conference, Portland: IEEE,2014.

[10] LI F W, SHI P, WANG X C, et al. Fault detection for networked control systems with quantization and Markovian packet dropouts [J]. **Signal Processing**, 2015, 111 (C): 106-112.

[11] LIU T F, JIANG Z P, HILL D J. A sector bound approach to feedback control of nonlinear systems with state quantization [J]. **Automatica**,2012,48(1):145-152.

[12] HAN Qing-long. Absolute stability of time-delay systems with sector-bounded nonlinearity [J]. **Automatica**, 2005, 41(12):2171-2176.

[13] CAO Y Y, SUN Y X, JAMES L. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain systems with time-varying delays [J]. **IEEE Proceedings-Control Theory and Applications**, 1998, 145(3):338-344.

[14] FU M Y, XIE L H. The sector bound approach to quantized feedback control [J]. **IEEE Transactions on Automatic Control**,2005,50(11):1698-1711.

[编辑:李 辉]

本文引用格式:

陈 俊,陈海飞,高金凤. 基于输入时延的线性连续时不变系统量化分析与控制[J]. 机电工程,2017,35(1):89-94.

CHEN Jun, CHEN Hai-fei, GAO Jin-feng. Quantized analysis and control of continuous linear time invariant system based on input delay [J]. *Journal of Mechanical & Electrical Engineering*, 2017, 35(1):89-94.