DOI:10.3969/j. issn. 1001 - 4551. 2017. 02. 007

# 基于排队论的理想在制品数学模型建立*

陈 杰,鲍 敏*,吴海龙
(浙江理工大学 机械与自动控制学院,浙江 杭州 310018)

**摘要**:针对车间生产线各工序在制品分布不合理的问题,对某一特定生产系统环境下理想在制品的数学模型进行了探索,通过剖析工序在制品数据特点,引入了排队论算法,提出了确定理想在制品数量的数学优化模型。该模型以满足生产的条件为前提,量化了各工序理想在制品数目,为管理人员控制工序在制品的数量提供了数学依据,摒弃了过去依靠经验作判断的方法,避免了工序间数量不均衡导致的资源浪费问题。最后以 A 公司为实例,将该车间某一生产线作业过程抽象成生产系统,通过该模型计算出了各工序理想在制品数量,并以模型结果为指导,改变了各工序数量。研究结果表明,通过该模型达到了优化生产线工序在制品分布不合理的目的,验证了该模型对车间生产较好的指导作用。

**关键词**:制造执行系统;在制品数量;排队论;工序
**中图分类号**:TH165 **文献标志码**:A **文章编号**:1001 - 4551(2017)02 - 0136 - 05

# Mathematical model establishment on optimal amount of work-in-process based on queuing theory

CHEN Jie, BAO Min, WU Hai-long
(Faculty of Mechanical Engineering & Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract**: Aiming at the problem that workshop production line process distribution was always unreasonable, the ideal mathematical model was explored in a specific production environment , and queuing algorithm was introduced by analyzing the characteristics of process data, the optimization mathematical model was proposed. The process of ideal WIP number was quantified under meeting the production conditions, and a scientific basis to control WIP number for the workshop manager was provided, as the same time, the past methods that depended on the experience to judge was abandoned and the process of resource waste caused by unbalanced quantity was avoided. Finally, a company was taken as an example, the workshop of a production line of production system was abstracted, the ideal number of the products was calculated by the model method, at the same time, using the model results as guide and WIP number was changed. The results indicate that the objective of optimization of production line process the irrational distribution is achieved by this mathematical model. Therefore, it is proved that this model can guide the production of the workshop.

**Key words**: MES; amount of work-in-process; queuing theory; working procedure.

## 0 引 言

现代制造业越来越强调车间在制品管理[1],有效地控制生产系统内在制品数量不仅能够降低生产成本,而且可缩短产品的生产周期,增加企业的市场竞争力。随着信息化在制造业的推行,现今的 MES 平台已经采集到车间各工序在制品数量信息,研究人员通过现有 MES 数据,以期找到理想的在制品数量,为控制

**收稿日期**:2016 - 09 - 08
**基金项目**:国家自然科学基金项目(51175475)
**作者简介**:陈杰(1990 - ),男,安徽阜阳人,硕士研究生,主要从事工业工程方面的研究. E-mail:15212493561@163. com
**通信联系人**:鲍 敏,男,副教授,硕士生导师. E-mail:mbao@zstu. edu. cn

生产系统内在制品数量提供指导。基于约束理论(TOC)搭建的 MES 平台中,提出了更多定性的方法和规则,像计算车间在制品数量这种定量问题研究较少。现行的一些方法,例如以瓶颈工序和瓶颈工序的上道工序加工时间的固定比例来设定缓冲区数量,但在设置固定比例和倍数时常常依据车间生产经验去设置,存在准确性不高、容易导致缓冲区数量过大或过小的情况。

针对确定在制品数量的问题,国内也有一些研究。比如胡鸿韬和江志斌[2]依据各工序生产设备在生产系统中对生产影响的灵敏度来确定设备约束权重;然后,依据权重比例来对生产周期进行划分,分解到各个工序当中,再根据 litter 公式确定各工序理想的在制品库存分布;最后,根据上、下游信息及在制品数量的实际值及理想值之间的差值,进行有优先级选择性加工。尽管通过仿真模拟实验能够有效验证算法具有一定的可行性,但其中所使用的部分参数需要靠经验值加以赋予;除此之外,设备约束权重的确定是通过离线仿真的结果,与实际生产存在较大的差异性,因此可以说,对于设备约束权重进行动态调整与调整目标、规划的确定还尚需进一步研究。

本研究结合当前研究现状,在计算车间理想在制品数量方面引入排队论算法[3],以实例验证,在工程上体现该模型实际的指导生产作用。

## 1　排队论引入生产系统

### 1.1　排队论概述

排队论的基本思想是 1909 年丹麦数学家埃尔朗在攻克自动电话设计问题时形成的[4],后来广泛应用于分析各种具有排队特征的问题,如:排队就餐、排队取票、工业工程优化求解等问题。

一般的排队过程包括 3 个要素:顾客源、列队和服务机构。顾客经由顾客源到达列队,依照一定的排队规则进行等待。等待结束后,服务机构会按照一定的服务规则来对顾客进行相应的服务,等到服务结束后,顾客离开。一般排队系统的排队流程如图 1 所示。

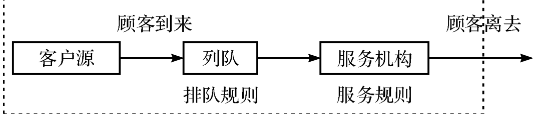


图 1　排队论基本模型

### 1.2　生产系统应用排队论

在生活应用场景中,有很多方面可以用排队系统进行解释,如前面所说的顾客和服务机构就可以换成其他对象,可以将顾客看成待加工的在制品,同样排队中形成的队长,可以看成待加工在制品数量。服务机构可以看成是加工设备。这样置换应用场景后,排队问题可以就应用到生产系统中,而且应用运筹学方法可以计算出工序间的平均在制品数量。应用排队理论的生产系统如图 2 所示。

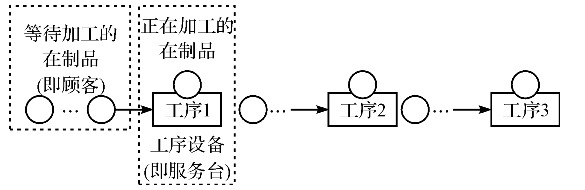


图 2　基于排队论的生产模型

图 2 中,等待加工的在制品看成顾客,正在加工的在制品看成正在接受服务的顾客,生产设备看成服务台。同时针对多品种生产,可分别对每种品种进行建模,对于现今多品种生产模式仍然适用。

### 1.3　在制品数量的排队特征选择

按照生产模式的不同,可以将生产排队模型分为 3 类:一是单列在制品单一工位;二是单列在制品多工位;三是多列在制品多工位。针对课题的研究对象,本研究选择第二类生产方式,单列在制品多工位模型如图 3 所示。

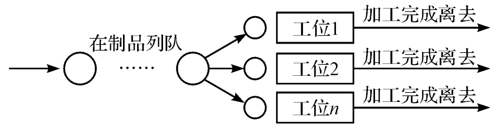


图 3　单列在制品多工位模型

通常来说,在制品进入生产系统的时间和具体工位对其加工的时间一般都是不确定的,但是在制品进入工序缓冲区的到达速率与工位对其加工的服务速率服从某一特定的分布,大致分为以下几种:

(1) 负指数分布

如果在制品到达缓冲区的速率服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布,则在制品进入缓冲区的时间分布服从参数为 $\lambda$ 负指数分布。其概率密度函数为:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}。$$

其中均值和方差为:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(T) = \frac{1}{\lambda^2}。$$

(2) 定长分布 $D$

$K$ 阶爱尔朗分布为 $E_k$,如果 $k$ 为无穷大,则 $D(T)=0$ 为定长分布,从而 $D$ 的分布函数表示为:

$$F(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t\geqslant a\end{cases}。$$

式中:$a$— 服务时间或到达时间间隔。定长分布的均值为 $a$,方差为 0。

(3) 一般分布 $G$

分布函数为:

$$F(t)=p\{x_n\leqslant t\}=1-e^{-\int_0^t u(x)\mathrm{d}x}。$$

其中均值和方差分别为:

$$E(T)=\frac{1}{u},D(T)=\sigma_n^2<+\infty。$$

以上列出的3种时间分布各有特点,泊松分布是一种普遍存在的分布类型,而且它可以较好地符合在制品进入生产系统的时间分布。笔者研究的生产线稳定,寻求生产线的平稳性,所以在制品进入系统的时间服从泊松分布。

为了更好地解释生产排队模型,笔者应用了国际标准的排队论符号来对模型描述。其中同行的扩充符号用[$X/Y/Z$]:[$A/B/C$]来表示。其中:$X$ 对应顾客到达的时间间隔分布(常用下列符号:$E_k$—$k$ 阶的爱尔朗分布,$M$— 泊松分布);$Y$ 处对应服务时间分布;$Z$ 处对应并列的服务台数量($s$— 单个服务台);$A$ 处对应系统容量限制;$B$ 处对应顾客源数量(分为有限和无限两种);$C$ 处对应服务规则(先到先服务为 FCFS,后到后服务为LCFS)。依照上述标准,本研究建立的排队论模型为[M/M/s]:[∞/∞/FCFS]。

该模型主要研究一道工序的加工模型。在制品进入缓冲区遵循先到先加工的原则,如果有生产设备闲置,则假设等待在制品立即加工,否则进入等待状态。在制品进入缓冲区的过程时间分布服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布。加工设备对在制品加工服务率符合参数为 $\mu$ 的负指数分布。

## 2　排队论模型计算在制品数量

### 2.1　参数 $\lambda$ 和 $\mu$ 设定

由第1节建立的基于排队论的生产模型可知,模型中关键性能指标由 $\lambda$ 和 $\mu$ 决定。

首先,根据月平均需求量和平均工作时间可以计算出每小时进入缓冲区的在制品数量,即到达率为:

$$\lambda=\frac{Q}{DH}\tag{1}$$

式中:$D$— 工序平均每月的工作天数,天;$Q$— 月平均需求量,个;$H$— 每天工时数,h。

然后是计算工序的累计合格品率。因为每道工序加工过程都有损耗,累计合格品率为:

$$F_i=f_if_{i+1}f_{i+2}...f_n=\prod_{x=i}^{n}f_x(i\leqslant n)\tag{2}$$

式中:$F_i$— 第 $i$ 道工序累计合格品率,%;$f_i$— 第 $i$ 道工序的合格品率,%。

最后再用返工率和合格品率对需求量进行修正:

$$\lambda_i=\frac{Q}{DH}\cdot\frac{1}{F_i(1-L_i)}\tag{3}$$

式中:$L_i$— 第 $i$ 道工序的返工率,%。

计算 $\mu$。将每小时加工产品数量作为服务率,则有:

$$\mu_i=\frac{60K_i}{G_{it}}\tag{4}$$

式中:$K_i$— 设备利用率(设备计划与实际使用时间比值);$G_{it}$— 标准工时,件/分。

### 2.2　计算理想在制品数量

如果排队系统的输入服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布,那么到达时间间隔序列 $\{J_k,k\geqslant1\}$ 是相互独立的随机变量序列。生产系统模型有 $n(n\geqslant1)$ 台设备,如果每台设备有相同的服务时间分布 $B$,$B\sim\Gamma(1,u)$,且设备之间相互独立,则每台设备服务时间序列变量相互独立。并且本研究假设 $\{B_k,k\geqslant1\}$ 和 $\{J_k,k\geqslant0\}$ 独立,可知该过程是生灭过程且存在平稳分布[5],分布为:

$$p_k=\begin{cases}\dfrac{(n\rho)p_0}{k!},k=1,2,\cdots,n-1,\\ \dfrac{(n^n\rho^k)p_0}{n!},k=n,n+1,\cdots,\end{cases}$$

$$p_0=\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n\rho)^k}{k!}+\frac{(np)^n}{n!(1-\rho)}\right]^{-1}\tag{5}$$

式中:$\rho$— 系统的服务强度,$p_k$— 系统内有 $K$ 个在制品的概率,$n$— 工位的个数,$p_0$— 设备处于空闲的概率。

根据生灭理论,当系统到达率大于服务率时[6],系统会处于不稳定状态。故生灭过程处在平稳分布的充要条件是 $\rho<1$,即当 $\rho=\lambda/(n\mu)<1$ 时,服务系统处于正常服务状态。由以上平稳分布计算出目标量:

服务强度:

$$\rho_1=\frac{\lambda}{\mu},\rho=\frac{\lambda}{n\mu}.\tag{6}$$

由公式(5)得知平稳时系统有 $k$ 个工件的概率为:

$$p_k=\begin{cases}\dfrac{\rho_1^k}{k!}p_0=\dfrac{n^k}{k!}\rho^k p_0 & 0\leqslant k<n\\ \dfrac{\rho_1^k}{n!n^{k-n}}p_0=\dfrac{n^n}{n!}\rho^k p_0 & k\geqslant n\end{cases}\tag{7}$$

当 $k = 0$，设备处于空闲的概率[7]：

$$p_0 = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^k}{k!} + \frac{\rho_1^n}{n!(1-\rho)} \right]^{-1} \tag{8}$$

由式(5,7)求出系统内平均排队列长，也就是缓冲区内工件个数：

$$L_q = \frac{\rho_1^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho_1)^2} p_0 \tag{9}$$

由于加工系统的在制品数量包括缓冲区内等待加工的工件和正在加工的工件[8]，系统内平均在制品数为：

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \tag{10}$$

因为该模型是针对单个工序进行计算，为了得到整个生产线在制品数量，应该分别对每个工序建模，最后相加等到整个生产线在制品数量 $L$：

$$L = \sum_{i=1}^{m} L_{is} \tag{11}$$

式中：$L$— 生产线理想在制品数量，个；$i$— 生产系统内工序的序号；$m$— 生产线中工序的数量。

# 3　实例分析

## 3.1　企业现状

A 公司是一家生产轴承的企业，为了及时掌握车间生产信息，本研究引进了一套制造执行系统(MES)，通过对各个工序环节信息的及时采集，实现产品状态实时跟踪查询。管理层可通过该系统实时查询在制品工序分布表，掌握生产线在制品数据。但车间实际现场中，每条生产线工序较多，加工也较复杂，这样有可能致使整条生产线上滞留很多在制品，导致工序间数量难以控制，生产周期拉长。目前 A 公司亟需解决的问题是如何保证某生产线稳定生产的同时，降低生产线在制品数量。同时可根据车间当前理想在制品判断是否需要投料。

现针对 A 公司的某一生产轴承内圈的产线(代名 G)，笔者使用上一节建立的针对生产系统的排队论模型。G 生产线共 9 道工序，从序号 1 依次拉式生产。通过 MES 功能模块收集模型所需数据，包括工件的标准工时、各工序在制品数量、设备利用率、合格品率、返工率等。其中有些数据还需进行预处理以供模型使用。

## 3.2　生产系统基本数据收集

笔者通过打开 MES 系统，调取 G 生产线的工序分布表，将各工序的数据汇总如表 1 所示。

**表 1　G 生产线各工序数量**

| 工序 | 名称 | 数量 | 工位 |
|---|---|---|---|
| 1 | 热处理 | 1 545 | 3 |
| 2 | 端面磨 | 1 029 | 3 |
| 3 | 外圆磨 | 290 | 1 |
| 4 | 沟道磨超 | 1 230 | 3 |
| 5 | 内径检验 | 2 041 | 2 |
| 6 | 外圆光整 | 893 | 1 |
| 7 | 外径检验 | 1 530 | 3 |
| 8 | 手工注脂 | 589 | 2 |
| 9 | 手工测振 | 1 039 | 2 |
| 总计 | … | 10 186 | … |

注：数据来源 MES

笔者通过整理各工序的合格率、返工率、利用率、标准工时等参数，基础数据如表 2 所示。

**表 2　G 生产线基础数据**

| 工序 | 合格率/(%) | 返工率/(%) | 利用率/(%) | 标准工时 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 98 | 2 | 96 | 1.0 |
| 2 | 92 | 0 | 80 | 0.8 |
| … | … | … | … | … |
| 8 | 90 | 2.5 | 87 | 1.2 |
| 9 | 93 | 3.2 | 92 | 1.7 |

注：标准工时单位：件/分

## 3.3　建立生产系统模型

笔者由公式(3,4)计算出各工序的服务率 $\lambda$(批/时)和到达率 $\mu$(批/时)，得到个工序服务率和到达率数据如表 3 所示。

**表 3　G 各工序服务率和到达率**

| 工序 | 名称 | 服务率 | 到达率 |
|---|---|---|---|
| 1 | 热处理 | 0.803 | 5.43 |
| 2 | 端面磨 | 7.72 | 3.52 |
| 3 | 外圆磨 | 2.7 | 4.30 |
| 4 | 沟道磨超 | 1.43 | 3.00 |
| 5 | 内径检验 | 5.39 | 3.92 |
| 6 | 外圆光整 | 3.28 | 5.90 |
| 7 | 外径检验 | 5.20 | 4.38 |
| 8 | 手工注脂 | 4.97 | 4.20 |
| 9 | 手工测振 | 2.43 | 4.78 |

## 3.4　结果计算和分析

笔者由式(9,10)分别计算出缓冲区工件数量和正在加工数量，通过两者相加最终计算出各工序的理

想在制品数量。并通过与 MES 平台得到的数据进行对比,工序在制品如表 4 所示。

表 4　G 各工序在制品数量对比

| 工序 | 名称 | 实际数量 | 理想数量 |
|---|---|---|---|
| 1 | 热处理 | 1 545 | 1 179 |
| 2 | 端面磨 | 1 029 | 1 090 |
| 3 | 外圆磨 | 290 | 970 |
| 4 | 沟道磨超 | 1 230 | 1 141 |
| 5 | 内径检验 | 2 041 | 1 093 |
| 6 | 外圆光整 | 893 | 1 002 |
| 7 | 外径检验 | 1 530 | 970 |
| 8 | 手工注脂 | 589 | 1 056 |
| 9 | 手工测振 | 1 039 | 1 107 |
| 总计 | | 10 186 | 9 608 |

通过表 4 数据可清晰看出目前该生产线实际在制品数量与理想在制品数量的差异[9],通过使用该份数据,车间管理人员可以为车间调度提供有力的指导。

## 4　结束语

本研究是在 MES 系统平台下,为车间在制品数量寻找最优解[10]。以 A 公司为研究案例,进行实证分析。案例分析的数据主要来源于 A 公司的生产实践数据,最优在制品数量为车间管理人员提供了较科学的生产指导。避免了由于不科学的投料导致的企业资源浪费,通过这种方式有效控制生产线的在制品数量,从而提高了企业对客户需求的反应速度。

尽管本研究对车间在制品数量控制方面得到了良好的结果。但是本研究仍有不足之处,首先在进行实例分析时,只截取了较短时间的数据,可能导致结果的片面性。然后模型中使用的设备故障率由于数据部分缺失,也可能导致结果不精确。最后,本研究在确定最优在制品数量后,对当前各工序的状态不能给出具体的排产指导,这也是后面的研究方向。

**参考文献(References):**


[1]　潘家招,曹德弼.现代生产管理学[M].2 版.北京:清华大学出版社,2003.

[2]　胡鸿韬,江志斌,张　怀.半导体生产线动态在制品水平控制方法[J].计算机集成制造系统,2008,14(9):1759-1765.

[3]　郭彩芬,生产物流系统在制品库存控制技术研究[D].南京:南京航空航天大学机电学院,2005.

[4]　黎文伟,张大方.端到端最小包时延可测性的排队分析与仿真[J].湖南大学学报:自然科学版,2007,34(4):73-77.

[5]　朱依霞.生灭过程的拟平稳分布[D].湘潭:湘潭大学信息工程学院,2012(5):906-917.

[6]　CAPACHO L, PASTOR R, DOLGUI A, et al. An Evaluation of Constructive Heuristic Methods for Solving the Alternative Subgraphs Assembly Line Balancing Problem[J]. **Journal of Heuristics**,2009, 15(2):109-132.

[7]　CHIEN C, HSU C, HSIAO C. Manufacturing Intelligence to Forecast and Reduce Semiconductor Cycle Time[J]. **Journal of Intelligent Manufacturing**, 2012, 23(6): 2281-2294.

[8]　ALIMOHAMADI M, SAJADI S M. A New EPQ Model with Considering Preventive Maintenance, Imperfect Product, Shortage and Work in Process Inventory[J]. **Interdisciplinary Journal of Contemporary Research in Business**, 2011,3(8):822-832.

[9]　李　薇,唐晓青,郭彩芬.在制品库存优化控制[J].航空制造技术,2009(7):88-93.

[10]　陈　弘.马氏排队库存系统最优控制策略研究[D].成都:电子科技大学计算机科学与工程学院,2012.


［**编辑**:李　辉］


**本文引用格式:**

陈　杰,鲍　敏,吴海龙.基于排队论的理想在制品数学模型建立[J].机电工程,2017,34(2):136-140.

CHEN Jie, BAO Min, WU Hai-long. Mathematical model establishment on optimal amount of work-in-process based on queuing theory[J]. Journal of Mechanical & Electrical Engineering, 2017,34(2):136-140.

《机电工程》杂志:http://www.meem.com.cn