

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2014.06.028

基于压缩传感理论的重构算法研究*

张 涛¹, 钟舜聪^{1,2,3*}, 朱志彬^{4,5}, 伏喜斌⁵

(1. 福州大学 机械工程及自动化学院无损检测实验室, 福建 福州 350108;

2. 福建省医疗器械和生物技术重点实验室, 福建 福州 350002;

3. 华东理工大学 承压系统安全科学教育部重点实验室, 上海 200237;

4. 福州大学 石油化工学院, 福建 福州 350108;

5. 厦门市特种设备检验检测院, 福建 厦门 361000)

摘要: 针对国内压缩传感理论(CS)尚处于起步以及理论研究阶段,为深入阐述该理论及对其实践应用性进行探索,将压缩传感理论从信号的稀疏表示、编码测量以及重构算法3个方面展开了较为详细的论述,并深入地阐述了重构算法中具有代表性的匹配追踪、正交匹配追踪、正则化正交匹配追踪算法。并进一步介绍了最小均方差线性估计(MMSE)算法,通过与常用重构算法的仿真对比,突出了MMSE算法在低采样率下的优越性。研究结果表明,该算法在实践中具有较好的应用潜力。

关键词: 压缩传感; 稀疏性; 信号处理; 信号重构; 重构算法; MMSE

中图分类号: TH39; TP14; TN911.73 **文献标志码:** A

文章编号: 1001-4551(2014)06-0805-05

Reconstruction algorithm based on compressed sensing

ZHANG Tao¹, ZHONG Shun-cong^{1,2,3*}, ZHU Zhi-bin^{4,5}, FU Xi-bin⁵

(1. Laboratory of Non-destructive Testing & Evaluation, School of Mechanical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China;

2. Fujian Key Laboratory of Medical Instrument and Pharmaceutical Technology, Fuzhou 350002, China;

3. Key Laboratory of Safety Science of Pressurized System of Ministry of Education, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China;

4. School of Chemical Engineering, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China;

5. Xiamen Special Equipment Inspection Institute, Xiamen 361000, China)

Abstract: Aiming at introducing and using compressive sensing(CS)into practice,CS was discussed in detail from sparse representation, encoding measurement and reconstruction algorithms. The commonly used reconstruction algorithms,such as matching pursuit,orthogonal matching pursuit and the regularized orthogonal matching pursuit,were reviewed. The minimum mean square error (MMSE) linear estimatealgorithm, which showed better reconstruction quality under low sampling rate, was introduced as well. Through the image simulation,compared with commonly used reconstruction algorithms,the results indicate that MMSE shows great superiority and potential for real applications.

Key words: compressive sensing; sparsity; signal processing; signal reconstruction algorithms; minimum mean square error(MMSE)

收稿日期: 2013-12-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51005077);教育部高等学校博士学科点科研基金资助项目(博导类,20133514110008);国家卫生和计划生育委员会科研基金资助项目(WKJ-FJ-27);福建省杰出青年基金资助项目(2011J06020);福建省质量技术监督局科技资助项目(FJQI2013095、FJQI2012024);福建省高等学校学科带头人培养计划资助项目(闽教人[2013]71号)

作者简介: 张 涛(1989-),男,湖北黄冈人,主要从事无损检测及仪器方面的研究. E-mail:fdmxh@sina.com

通信联系人: 钟舜聪,男,研究员,博士生导师. E-mail:sczhong@fzu.edu.cn

0 引言

奈奎斯特采样定理指出,为了能重构出原始信号,带限信号的采样频率必须不小于信号最高频率的两倍^[1]。然而随着信号带宽逐渐加宽,提高采样率所带来的硬件成本是非常昂贵的^[2],这无疑给相应的硬件设备带来了极大的挑战,因而使得宽带信号的处理变得日益困难^[3]。

在传统的信号处理过程中,以图像信号为例,首先通过采样取得完整的信号样本,采样过程须满足采样定理;再将信号在某个域(例如频域、小波域等)内进行变换,使信号稀疏化,而后只存储变换后小部分较大的值,最后解码出原始信号。信号处理之后丢弃了大部分采样所得的数据,实现了数据压缩,但不影响最终结果的重建^[4]。

2004年D.Donoho^[5]、T.Tao^[6]及E.Candes^[7]等人提出了一种新型的信息处理理论,即压缩传感^[8-9](Compressed Sampling, CS)或称为Compressed Sensing、Compressive Sensing,它开启了信号采样的新革命。

与采样定理的区别在于,压缩传感理论表明只要信号通过某种变换后可以稀疏表示,就能以较低的频率进行全局性采样,该采样频率可以远小于采样定理所要求的标准,从而获得少量的全局信号观测值,再通过重建算法将初始信号从测量值中解码出来。

压缩传感理论(下文简称为CS理论)主要包括信号的稀疏表示、非线性编码测量以及重建算法3个部分^[10]。

CS理论虽然目前处于研究的初始阶段,但发展迅速,已经发展了多种形式,例如Bayesian CS理论、1-BIT CS理论、无限维CS理论、分布CS理论、变形CS理论等,已成为学术界的研究热点。

由于目前国内对该领域的研究尚处于起步阶段,本研究将对压缩传感理论进行详细介绍,对其中所涉及的关键技术进行综述和整理。笔者在总结现有常用重构算法的基础上,介绍最小均方差线性估计(MMSE)算法,该算法在低采样率下重构效果较好,且适用于工程实际,本研究通过图像的仿真重构突出MMSE算法的优越性及其在实践领域的应用潜力。

1 信号稀疏表示

假如信号中只有极少数非零元素,则该信号是稀疏的。时域信号大都具有非稀疏性,然而通过一些变换则可变得稀疏。

对于离散信号 $x(n)$, $n \in [1, 2, \dots, n]$, 它可以用

$N \times 1$ 维的基向量 $\{\Psi_i\}_{i=1}^N$ 来线性表示。假设这些基向量都是正交的,则信号 x 可表示为:

$$x = \sum_{k=1}^N \psi_k s_k = \Psi s \quad (1)$$

式中: x , s — $N \times 1$ 矩阵; Ψ — $N \times N$ 矩阵; $s_k = \langle x, \psi_k \rangle = \psi_k^T x$ 。

如果信号 x 通过变换域 Ψ 的作用后,变换向量中只有 K 个非零元素 s_k 时,但大部分情况下该条件难以严格满足,因此也可以是具有 K 个远大于零的系数,此时信号是可压缩的,就可以称 s 为信号 x 的 K 稀疏表示, Ψ 为信号 x 的稀疏变换基。

压缩传感理论的先决条件是信号必须经过某种变换后可以稀疏表示。信号的稀疏表示就是将信号作用到某变换域内,大部分的转换系数都较小,此时变换矢量是稀疏的,因此它可以被视为初始信号的简明表示^[11]形式。

常用的变换域有快速傅立叶变换(FFT)、离散余弦变换(DCT)、离散小波变换(DWT)^[12]、Gabor变换^[13]、Curvelet变换^[14]以及冗余字典^[15-16]等。

2 编码测量

CS不是直接测量初始信号,而是测量信号与一个非相关的系统(下文将该系统简称为测量矩阵)作用之后的信号,每一个测量值是所有样本信号的线性组合,因此每个测量值包括了所有采样信号的信息。为此它可看作是全局采样,而奈奎斯特则可看作是局部采样。

因此,压缩传感理论可综合理解为:在某变换基 $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N]$ 上具有 K 稀疏的信号 $x \in R^N$,通过它在另一不相关基 $\Phi = (\Phi_1^T, \Phi_2^T, \dots, \Phi_M^T)$ 上的 M ($K < M \ll N$)个观测值 $y(i) = \langle x, \Phi_i^T \rangle$, $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ 获得近似或精确重构,即为:

$$y = \Phi x = \Phi \Psi s = \Theta s \quad (2)$$

式中: y — $M \times 1$ 测量向量; Φ — $M \times N$ 测量矩阵; x — $N \times 1$ 矩阵; Θ — 传感矩阵, $\Theta = \Phi \Psi$ 。

压缩传感理论的理论模型如图1所示。

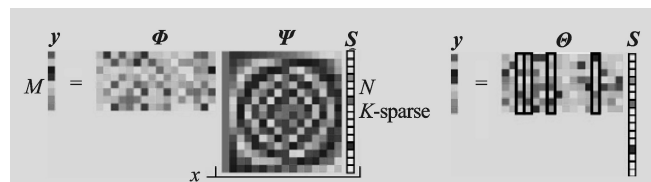


图1 压缩传感理论模型

由上述表达可知, y 的维数小于 x 的维数,有无穷个解,因此很难重构出初始信号。但由于 s 是 K 稀

疏的,且 $K < M \ll N$,再通过稀疏分解算法,用于求解式(2)的逆命题模型,就可得到稀疏系数 s ,再进一步回代入式(1)即可求得信号 x 。

为了能重构出原始信号 x ,测量次数必须达到 $M = O(K \ln(N))$,而且传感矩阵也一定要满足受限等距特性(RIP)准则^[17-18],但RIP准则计算复杂度相对较高,常用其等价条件,即稀疏变换基不应与测量矩阵相关。

实际应用中稀疏矩阵会因信号的改变而不同,所以希望找到能普遍适用的测量矩阵,能与任意稀疏基都不相关。对一维信号的重构,往往选用高斯矩阵和伯努利矩阵等;对二维信号则常选用随机分布矩阵、Hadamard矩阵以及部分傅立叶变换矩阵等。

3 重构算法

重构算法是CS理论的核心,重构算法的主要内容是从 M 维的测量向量 y 中重构出稀疏度为 K 的信号 x 。

通过求解式(2)的逆命题,可以求得稀疏系数 $s = \psi^T x$,理论证明信号重构问题与最小 l_0 范数具有等价性,因此重构问题可转化下式:

$$\min \|s\|_{l_0} \quad \text{s.t.} \quad y = \Phi \psi s \quad (3)$$

式中: $\|\cdot\|_{l_0}$ — l_0 范数,数学意义是计算信号非零元素的个数。

但上述优化问题是NP-hard问题,理论证明,当测量矩阵满足RIP准则时, l_0 优化问题与 l_1 优化问题具有等价性,从而将NP-hard问题变为数值上容易处理的优化问题,那么式(3)即转化为 l_1 最小范数下的最优优化问题:

$$\min \|s\|_{l_1} \quad \text{s.t.} \quad y = \Phi \psi s \quad (4)$$

最小 l_1 范数优化问题是一个线性规划的凸优化问题,典型的算法代表是基追踪(BP)算法。

本研究整理了相关算法,特别是重构算法中的贪婪算法,该算法目前具有代表性和较高的使用频率。

贪婪算法经常不断发展和完善,已有多种变形,主要包括匹配追踪(MP^[19])、正交匹配追踪(OMP^[20])、正则化的正交匹配追踪(ROMP^[21])、压缩采样匹配追踪(CoSaMP)以及逐步正交匹配追踪(STOMP^[22])等。

本研究详细介绍了贪婪算法的数学原理,并介绍了MMSE算法,该算法在低采样率下能实现较高质量的重构,以下即为算法的详细介绍。

3.1 匹配追踪

匹配追踪(Matching pursuit, MP)算法主要是从

$y = \Phi x$ 中重构出最稀疏的 x 。算法主要是从测量矩阵 Φ 中,选取出与信号 y 最为匹配的列向量,也可以称之为原子,来建立一个稀疏逼近,再求出信号的残差;通过若干次迭代,依次不断选取出与对应信号残差相匹配的原子,构建原子组合,那么信号 y 就能够由所选取原子的线性组合,与最终的残差之和来表示。假如残差在误差范围之内,那么信号 y 就可以简化为由所选原子的线性组合来简洁表示。

3.2 正交匹配追踪

MP算法是对信号在选定的原子上进行投影,它是不正交的,需要经过多次迭代,算法方能收敛,因此结果不是最优的。

而正交匹配追踪算法(OMP)则有效地解决了这个问题,该算法采用了相同的原子选择准则,区别在于残差的更新方式有所不同。OMP在每次迭代之后,对所有已选择原子进行正交化,使残差与所有已选择原子所生成的子空间正交。经过正交化处理原子被选定以后,在后续的迭代中将再也不能被选取,通过对已选取的原子集合逐步进行正交化处理,因此缩小了迭代的次数,确保了迭代的最优性。

3.3 正则化正交匹配追踪算法

Needell等人是为了解决OMP算法中满足RIP准则但有时仍无法精确重构的问题,适时地推出了正则正交匹配追踪算法(Regularized orthogonal matching pursuit, ROMP),该算法对所有稀疏信号和满足RIP准则的测量矩阵都能实现精确地重建。

与OMP的区别在于,该算法先采用相干性,选取出多个符合条件的原子作为候选集合;然后根据正则化原理从候选原子集合选定出符合条件的原子集合,然后纳入支持集,快速实现原子的有效选择。

ROMP算法需要先对信号的稀疏度进行估计,然后才能重建原始信号。但实验表明,对稀疏度的估计要求较高,如稀疏度估计过大,则重建质量较差,不能达到精确重构的效果;如稀疏估计太小,则可能经过几次迭代后仍不能达到停止条件。

3.4 最小均方差线性估计

为了使 $\|x_i - \hat{x}_i\|_2$ 最小,现有的CS方法通过直接法得到 x 的初始解 $\hat{x}$,其中 $\hat{x} = \Phi^T(\Phi\Phi^T)^{-1}y$ 。而分块CS算法由最小均方差线性估计(MMSE)求出初始解 $\hat{x}$,其中 $\hat{x}_i = \Phi_B y_i$ 表示第 i 个重建图像块的向量形式,逆可压缩测量矩阵 $\Phi_B = R_{xx}(\Phi_B)^T(\Phi_B R_{xx}(\Phi_B)^T)^{-1}$,其中 R_{xx} 表示输入信号的自相关函数,它采用AR的相关系数为0.95的模型来近似。由于 Φ_B 的尺度较小,MMSE算法易于实现^[23]。

4 仿真结果对比

为了说明上述算法的重构效果,本研究采用大小为 256×256 的Boat图像进行重构实验。算法中采用小波基作为稀疏变换基,利用高斯随机矩阵作为测量矩阵,Boat的原始图像如图2所示。



图2 Boat原始图像

Boat图像在采样率为10%时MP、OMP、ROMP以及MMSE算法的重建效果如图3所示。由图3可见,在采样率相同的情况下,MMSE算法进行图像重构的效果明显优于MP、OMP和ROMP算法,三者要在采样率为60%时才能达到该重构效果。

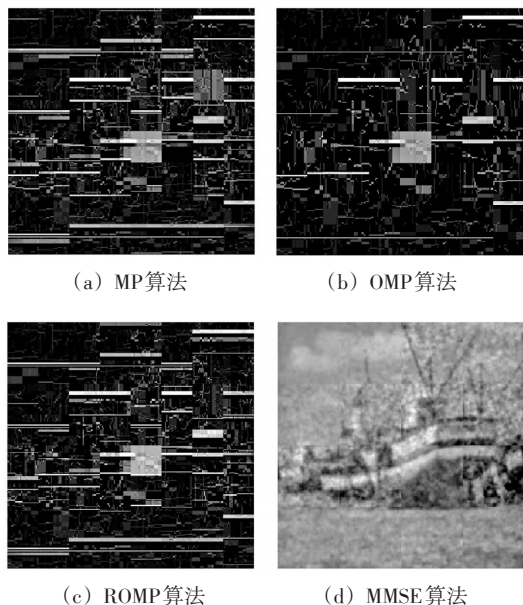


图3 采样率为10%时,算法重构仿真效果

随着采样率的提高,各算法重构质量都有明显提高,但MMSE算法的重构效果始终明显优于MP、OMP、ROMP算法。当采样率为10%,后3种算法效果较差,重建后无法重构原始图像,但MMSE算法重建图像质

量依然较高,仍然可以重建原始图像,显示了很大的优越性。

笔者研究发现MMSE算法模型与实物重构模型类似,有着较好的应用潜力,目前国内压缩传感理论大都停留在理论研究阶段,鲜有涉及硬件系统开发应用,如能设计出一套与实物重构模型相匹配的硬件系统,MMSE算法将在实践中体现出低采样率下重构质量较高的优势,将是实践领域的另一突破。

5 结束语

本研究主要阐述了压缩传感理论,并深入研究了重建算法中使用频率较高且具代表性的MP、OMP、ROMP算法,对其原理进行了较为详细的论述,与此同时对性能稳定、重构质量较好的最小均方差线性估计(MMSE)方法也进行了介绍。笔者通过各算法对二维图像进行了仿真重构,突出了MMSE算法在低采样率下重构质量较好的特点,并指出其在实践中有着较好的应用潜力。

压缩传感理论引起了信号处理领域的重大改变,它丰富了信息获取理论,而且对其他学科产生了很好的启迪和借鉴作用,有着良好的应用前景,但如何将其应用于工程实践则是另一个严峻的机遇和挑战。

参考文献(References):

- [1] 石光明,刘丹华,高大化,等. 压缩感知理论及其研究进展[J]. 电子学报,2009,37(5):1070-1081.
- [2] 金坚,谷源涛,梅顺良. 压缩采样技术及其应用[J]. 电子与信息学报,2010,32(2):470-474.
- [3] 喻玲娟,谢晓春. 压缩感知理论简介[J]. 数字视频报,2008,32(12):16-18.
- [4] 李树涛,魏丹. 压缩传感综述[J]. 自动化学报,2009,35(11):1369-1377.
- [5] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. **IEEE Transactions on Information Theory**, 2006,52(4):1289-1306.
- [6] CANDES E,ROMBERG J,TAO T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. **IEEE Transactions on Information Theory**, 2006,52(2):489-509.
- [7] E CANDES,ROMBERG J. Quantitative robust uncertainty principles and optimally sparse decompositions[J]. **Foundations of Comput Math**, 2006,6(2):227-254.
- [8] CANDES E. Compressive sampling[C]//Proceedings of International Congress of Mathematicians. Madrid, Spain, 2006,3:1433-1452.

(下转第818页)

本文引用格式:

张涛,钟舜聪,朱志彬,等. 基于压缩传感理论的重构算法研究[J]. 机电工程,2014,31(6):805-808,818.

ZHANG Tao, ZHONG Shun-cong, ZHU Zhi-bin, et al. Reconstruction algorithm based on compressed sensing[J]. Journal of Mechanical & Electrical Engineering, 2014,31(6):805-808,818.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>

参考文献(References):

- [1] 闫齐阳,彭 龔. ZigBee+GPRS 的 LED 路灯监控系统[J]. 单片机与嵌入式系统应用,2012,12(12):68-70,73.
- [2] 孙利民,梁江涛,魏 然. 基于 GPRS 与 ZigBee 的远程分散多点监控系统[J]. 郑州大学学报:工学版,2012,33(1):24-27.
- [3] 胡 玫,王永喜. 基于 ZigBee 和 GPRS 的无线测控系统[J]. 兰州工业高等专科学校学报,2012,19(2):10-12.
- [4] 樊 超,杨铁军,张德贤,等. 基于 Zigbee 和 GPRS 相结合的粮食数量无线监控系统设计[J]. 河南工业大学学报:自然科学版,2012,33(1):69-74.
- [5] 吴 征,蒋正炎. 基于 ZigBee 与 GPRS 技术的数字化农电网远程抄表通信控制器的设计[J]. 安徽农业科学,2012,40(8):5030-5031,5034.
- [6] 邓小蕾,李民赞. 集成 GPRS、GPS、ZigBee 的土壤水分移动监测系统[J]. 农业工程学报,2012,28(9):130-135.
- [7] YANG Fu-xing, LIU Chan-yuan. The Design of Wireless Remote Intelligent Home System Based On Zigbee and Gprs [C]//Proceedings of ICCTA2011. Beijing:[s.n.],2011:689-693.
- [8] ZHANG Yu-jie, HUI S. The Design of Network Coordinator Based on ZigBee and GPRS Technology[C]//2012 International Conference on Computer Science and Electronics Engineering. Hangzhou:[s.n.],2012:40-43.
- [9] 俞昌忠,陈跃东. 基于 B/S 结构的 GPRS 无线数据传输系统的设计[J]. 安徽工程大学学报,2011,26(4):38-43.
- [10] 陈 琦,丁 怀. 基于 GPRS/GSM 的低功耗无线远程测控终端设计[J]. 清华大学学报:自然科学版,2009,49(2):223-225,231.
- [11] 冼土明,徐 杜,蒋永平. 基于 ZigBee-GPRS 技术的无线传感网络[J]. 软件,2011,32(1):58-60.
- [12] 何 赛,陈小平. GPRS 与 Zigbee 的城市照明系统网关设计[J]. 单片机与嵌入式系统应用,2012(1):27-29.
- [13] 周慧玲,甘典文. 基于 ARM /GPRS /ZigBee 技术的无线粮情监控系统的设计与实现[J]. 测控技术,2011,2(9):1336-1338.

[编辑:李 辉]

本文引用格式:

蒋煜琪,谷兆贵,史旺旺. 基于 ZigBee 和 GPRS 的多通讯功能无线测控系统[J]. 机电工程,2014,31(6):814-818.

JIANG Yu-qi, GU Zhao-gui, SHI Wang-wang. Multifunctional wireless measurement and control system based on ZigBee and GPRS[J]. Journal of Mechanical & Electrical Engineering,2014,31(6):814-818.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>

(上接第 808 页)

- [9] CANDÈS E, ROMBERG J. Practical signal recovery from random projections [EB/OL] [2005-01-25]. <http://www.acm.caltech.edu/~emmanuel/papers/PracticalRecovery.pdf>.
- [10] BARANIUK R G. Compressive sensing [J]. **IEEE Signal Processing Magazine**,2007,24(4):118-121.
- [11] OLSHAUSEN B A, FIELD D J. Emergence of simple-cell receptive field properties by learning a sparse code for natural images[J]. **Nature**,1996,381(6583):607-609.
- [12] MALLAT S. 信号处理的小波导引[M]. 2版. 北京:机械工业出版社,2002.
- [13] SUN Yu-Bao, XIAO Liang, WEI Zhi-hui, et al. Sparse representations of images by a multi-component Gabor perception dictionary [J]. **Acta Automatica Sinica**,2008,34(11):1379-1387.
- [14] CANDÈS E, DONOHO D L. Curvelets—a surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges[R]. Technical Report 1999-28, Department of Statistics, Stanford University, USA,1999.
- [15] AHARON M, ELAD M, BRUCKSTEIN A M. The K-SVD: an algorithm for designing of overcomplete dictionaries for sparse representations [J]. **IEEE Transactions on Image Processing**,2006,15(11):4311-4322.
- [16] RAUHUT H, SCHNASS K, VANDERGHEYNST P. Compressed sensing and redundant dictionaries [J]. **IEEE Transactions on Information Theory**,2008,54(5):2210-2219.
- [17] CANDÈS E. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing [J]. **Académie des sciences**,2006,346(1):598-592.
- [18] CANDÈS E, TAO T. Decoding by linear programming [J]. **IEEE Transactions on Information Theory**,2005,51(12):4203-4215.
- [19] MALLAT S, ZHANG Z. Matching pursuit in a time-frequency dictionary [J]. **IEEE Transactions on Signal Processing**,1993,41(12):3397-3415.
- [20] TROPP J A, GILBERT A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. **IEEE Transactions on Information Theory**,2007,53(12):4655-4666.
- [21] NEEDELL D, VERSHYNIN R. Greedy Signal Recovery and Uncertainty Principles [C]//Proceedings of the conference on Computational Imaging. San Jose, USA: SPIE,2008:1-12.
- [22] DONOHO D L, TSAIG Y, DRORI I, et al. Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit [R]. Technical Report, Department of Statistics, Stanford University, Stanford CA,2006.
- [23] GAN L. Block Compressed Sensing of Natural Images [C]//Proceeding of the 15th International Conference on Digital Signal Processing. Washington D. C., USA: IEEE,2007:403-406.

[编辑:李 辉]