

齿轮传动转子系统弯扭耦合振动研究

车永强¹, 徐静霞², 钱小东², 李蔚¹, 盛德仁^{1*}, 陈辉³

(1. 浙江大学 热工与动力系统研究所, 浙江 杭州 310027;

2. 杭州中能汽轮动力有限公司, 浙江 杭州 310018;

3. 山东电力工程咨询院有限公司, 山东 济南 250000)

摘要: 为分析齿轮传动复杂轴系的振动问题,根据有限元法和拉格朗日法,考虑陀螺效应、油膜支承等因素,得到了转子-轴承系统的弯扭耦合振动模型;在此基础上,根据齿轮副运动过程中啮合刚度和啮合阻尼的变化,得到了齿轮副系统的弯扭耦合振动模型。然后,根据齿轮副的实际排列方式,引入方位角,使得转子模型与齿轮副模型坐标统一化,并将其耦合到一起,得到了更加接近实际的齿轮转子模型,并且计算了其临界转速和振型。研究表明,耦合后转子的临界转速低于单转子的临界转速,齿轮传动对转子轴系振动有着明显影响。

关键词: 齿轮传动;弯扭耦合振动;啮合刚度;啮合阻尼

中图分类号: TH132.41;TH113.1;O347.6

文献标志码: A

文章编号: 1001-4551(2012)06-0632-04

Coupled bending and torsional vibrations of geared rotor system

CHE Yong-qiang¹, XU Jing-xia², QIAN Xiao-dong², LI Wei¹, SHENG De-ren¹, CHEN Hui³

(1. Department of Energy Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China;

2. Hangzhou Chinen Steam Turbine Power Co., Ltd., Hangzhou 310018, China;

3. Shandong Electric Power Engineering Consulting Institute Co., Ltd., Jinan 250000, China)

Abstract: In order to analyze vibration of geared rotor system, according to Finite element method and Lagrange method, gyroscopic effect and oil bearing was taken into consideration, a coupled lateral and torsional vibration model of rotor-bearing system was presented for analyze geared rotor vibration. The variation of mesh stiffness and mesh damping was taken into consideration, and the coupled lateral and torsional vibration model of gear pair system was established. Then, according to gear pair practical arrangement, the coordinate of rotor model and gear pair model was coupled and united by defining azimuth angle. A rotor-gear model which was closer to practice was obtained, and the critical speeds and models were calculated. The result shows that the critical speed of geared rotor is lower than single rotor's, and gear drive has obvious influence on rotor vibration.

Key words: gear drive; coupled bending and torsional vibrations; mesh stiffness; mesh damping

0 引言

由于齿轮副的存在,齿轮传动转子系统中各转子之间的运动相互耦合、相互作用,其动力学特性和单转子系统不同,因此,必须以整个齿轮-转子系统为对象进行研究。针对齿轮-转子系统的动力学建模和分析,许多学者已经做了大量的工作。Mohiuddin^[1]考虑

陀螺效应,用有限元法建立了单转子的弯扭耦合振动模型。Rao等人^[2-3]建立了齿轮传动转子系统的有限元模型,对齿轮箱和齿轮-转子-轴承系统进行了弯扭耦合振动分析,探讨了齿轮啮合刚度对固有频率和模态振型的影响。Lee等人^[4]研究了随着转速的增加,齿轮转子系统的弯曲振动和扭转振动特性,并讨论了弯扭耦合振动应变能的变化情况。蒋庆磊等人^[5]建立了

收稿日期:2011-12-26

作者简介:车永强(1986-),男,山东潍坊人,主要从事转子动力学方面的研究。E-mail: cheyongqiang163@163.com

通信联系人:盛德仁,男,教授。E-mail: shengdr@zju.edu.cn

5自由度的齿轮-转子-轴承有限元模型,并通过已有实验结果验证了模型与方法的有效性。但在整个齿轮-转子系统坐标系的选取上,以齿轮副中心线为 Y 轴正方向,或以齿轮啮合线为 Y 轴正方向,都不能完整地表述齿轮副的排列。另外,齿轮副转动过程中,主、被动齿轮各自的横向振动,必然导致两齿轮中心位移变化,从而引起齿轮副重合度的改变,导致齿轮副啮合刚度变化。

本研究充分考虑上述因素的影响,应用有限元方法建立5自由度的转子-轴承模型,应用牛顿第二定律建立5自由度的齿轮副啮合模型,引入方位角 β ,使得齿轮转子系统设计时,可随意排列齿轮副,然后通过坐标系变换,将转子-轴承模型和齿轮副模型的坐标系统一化,然后耦合到一起,建立完整的具有统一坐标系的齿轮-转子模型。

1 转子弯扭耦合模型

某齿轮传动转子系统的简化分析模型如图1所示。该系统的结构参数如表1所示。

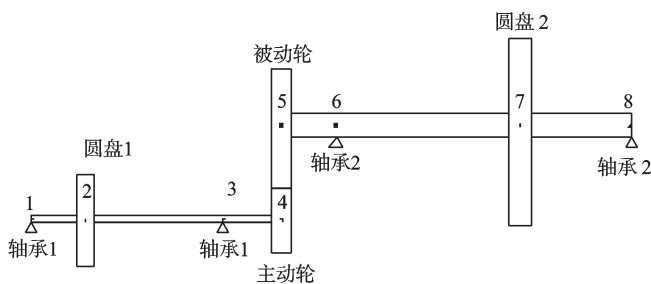


图1 齿轮传动双转子模型图

表1 转子模型参数

模 型	参 数
主动轴长/m	4.6
被动轴长/m	5.5
主动轴半径/m	0.025
被动轴半径/m	0.075
圆盘1质量/kg	10.4
圆盘2质量/kg	432.2
圆盘1极转动惯量/($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)	0.3
圆盘2极转动惯量/($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)	20.74
轴承1刚度/($\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$)	1.02×10^7
轴承2刚度/($\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$)	1.84×10^8
轴承1阻尼/($\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$)	3 000
轴承2阻尼/($\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$)	3 000

该转子系统可以大致划分为轴段、圆盘、齿轮副、轴承等单元。分别建立各单元的运动微分方程,然后组合,就可以得到该系统的广义坐标运动微分方程。

1.1 轴单元运动微分方程

本研究以铅直方向为 Y 轴建立直角坐标系,轴单

元广义位移坐标可以表示为:

$$\mathbf{u}_e = [x_A \quad y_A \quad \theta_{xA} \quad \theta_{yA} \quad \varphi_A \quad x_B \quad y_B \quad \theta_{xB} \quad \theta_{yB} \quad \varphi_B]^T \quad (1)$$

式中: x 、 y 、 θ_x 、 θ_y — x 、 y 方向的平动及弯曲位移, φ —轴向的扭转位移。

轴单元内任意一点的扭转位移可以表示为:

$$\varphi(s, t) = (1 - \frac{s}{l})\varphi_A(t) + \frac{s}{l}\varphi_B(t) \quad (2)$$

式中: s —与轴段结点的距离, l —轴单元的长度。

轴单元扭转动能和扭转势能的表达式为:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_0^l \rho I_p \left(\frac{\partial \varphi(s, t)}{\partial t} \right)^2 ds = \frac{1}{2} [\dot{\varphi}_A \quad \dot{\varphi}_B] \mathbf{M}_s [\dot{\varphi}_A \quad \dot{\varphi}_B]^T \quad (3)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^l G I_p \left(\frac{\partial \varphi(s, t)}{\partial s} \right)^2 ds = \frac{1}{2} [\varphi_A \quad \varphi_B] \mathbf{K}_s [\varphi_A \quad \varphi_B]^T$$

将式(3)代入拉格朗日方程,得到轴单元扭转运动微分方程:

$$\mathbf{M}_s [\ddot{\varphi}_A \quad \ddot{\varphi}_B]^T + \mathbf{K}_s [\varphi_A \quad \varphi_B]^T = \mathbf{Q}_s \quad (4)$$

$$\text{其中: } \mathbf{M}_s = \frac{\rho I_p l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_s = \frac{G I_p}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

式中: ρ —密度, I_p —极惯性矩。

轴单元平动与弯曲振动的运动微分方程参见文献[6]。

1.2 圆盘运动微分方程

圆盘的广义坐标系同轴单元,则圆盘广义位移坐标为:

$$\mathbf{u}_d = [x_d \quad y_d \quad \theta_{xd} \quad \theta_{yd} \quad \varphi_d]^T \quad (5)$$

圆盘扭转动能的表达式为:

$$T_d = \frac{1}{2} J_p \dot{\varphi}_d^2 \quad (6)$$

本研究将式(6)代入拉格朗日方程,得到圆盘的扭转运动微分方程为:

$$J_p \ddot{\varphi}_d = Q_d \quad (7)$$

圆盘平动与弯曲振动的运动微分方程参见文献[6]。

2 齿轮副弯扭耦合模型

2.1 齿轮副啮合刚度与啮合阻尼

本研究中的齿轮副采用标准渐开线圆柱直齿齿轮,因此齿轮平均啮合刚度可以表示为^[7-8]:

$$k_m = b(0.75\varepsilon + 0.25)k' \times 10^6 \quad (8)$$

式中: k' —单对齿啮合刚度, $k' = 1/(0.04723 + 0.1551/z_1 + 0.25791/z_2)$; z —齿轮齿数; b —齿轮宽度; ε —齿轮重合度。

齿轮副在运动过程中,必然引起两齿轮中心位移变化,则齿轮重合度和啮合角也随之变化,从而导致齿轮副啮合刚度 k_m 的变化。齿轮重合度和啮合角可以表示为:

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} [z_1(\tan \alpha_{a1} - \tan \alpha) + z_2(\tan \alpha_{a2} - \tan \alpha)] \quad (9)$$

$$\alpha' = \arccos \frac{R \cos \alpha}{R'} \quad (10)$$

式中: R' —两齿轮中心位移, $R' = R + (x_1 - x_2)$; R —齿轮副标准中心距, $R = r_1 + r_2$; x —齿轮中心平动位移; α —齿轮分度圆压力角; α_{a1} , α_{a2} —主、被动轮齿顶圆压力角。

齿轮啮合阻尼可以表示为:

$$c_m = 2\xi \sqrt{\bar{m}k_m} \quad (11)$$

式中: ξ —阻尼比,本研究取0.06; $\bar{m}$ —齿轮当量质量, $\bar{m} = J_{p1}J_{p2}/(r_1^2J_{p1} + r_2^2J_{p2})$; J_p , r —齿轮的极转动惯量和基圆半径。

2.2 齿轮副单元运动微分方程

齿轮副单元的简化分析模型如图2所示。齿轮副单元的结构尺寸如表2所示。以齿轮副啮合线方向为 Y 轴建立直角坐标系,得到齿轮副的广义坐标为:

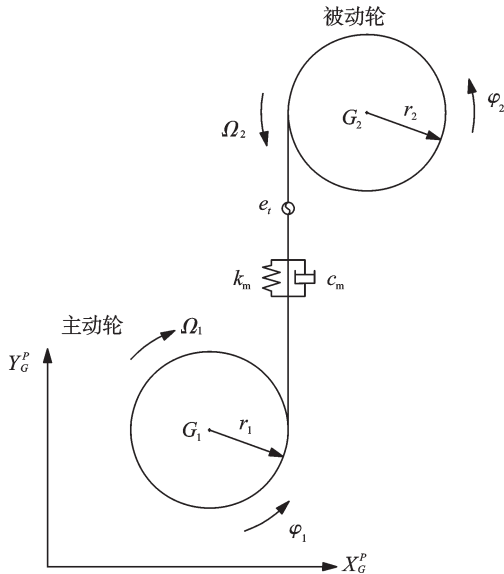


图2 齿轮副啮合模型

$$\mathbf{u}_G^p = [x_1 \ y_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \varphi_1 \ x_2 \ y_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \varphi_2]^T \quad (12)$$

式中:下标1、2—主动轮和被动轮;上标 p —啮合线方向。

本研究分析每个齿轮的受力和力矩,根据牛顿第二定律,建立齿轮副运动微分方程为:

$$\mathbf{M}_G^p \ddot{\mathbf{u}}_G^p + \mathbf{C}_G^p \dot{\mathbf{u}}_G^p + \mathbf{K}_G^p \mathbf{u}_G^p = \mathbf{Q}_G^p \quad (13)$$

表2 齿轮副模型参数

模 型	参 数
主动轮齿数	38
被动轮齿数	228
模数/mm	9
齿轮宽度/m	0.1
主动轮质量/kg	8.2
被动轮质量/kg	730.6
主动轮极转动惯量/(kg·m ²)	0.02
被动轮极转动惯量/(kg·m ²)	115.72
分度圆压力角/(°)	20
齿顶高系数	1
齿轮副方位角/(°)	45

其中:

$$\mathbf{M}_G^p = \text{diag}(m_1 \ m_1 \ J_{d1} \ J_{d1} \ J_{p1} \ m_2 \ m_2 \ J_{d2} \ J_{d2} \ J_{p2});$$

$$\mathbf{C}_G^p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_m & 0 & 0 & c_m r_1 & 0 & -c_m & 0 & 0 & c_m r_2 \\ 0 & 0 & 0 & J_{p1} \Omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{p1} \Omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_m r_1 & 0 & 0 & c_m r_1^2 & 0 & -c_m r_1 & 0 & 0 & c_m r_1 r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_m & 0 & 0 & -c_m r_1 & 0 & c_m & 0 & 0 & -c_m r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{p2} \Omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_{p2} \Omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_m r_2 & 0 & 0 & c_m r_1 r_2 & 0 & -c_m r_2 & 0 & 0 & c_m r_2^2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_G^p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_m & 0 & 0 & k_m r_1 & 0 & -k_m & 0 & 0 & k_m r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_m r_1 & 0 & 0 & k_m r_1^2 & 0 & -k_m r_1 & 0 & 0 & k_m r_1 r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_m & 0 & 0 & -k_m r_1 & 0 & k_m & 0 & 0 & -k_m r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_m r_2 & 0 & 0 & k_m r_1 r_2 & 0 & -k_m r_2 & 0 & 0 & k_m r_2^2 \end{bmatrix} \circ$$

2.3 齿轮副坐标变换

齿轮副的3种坐标系如图3所示。

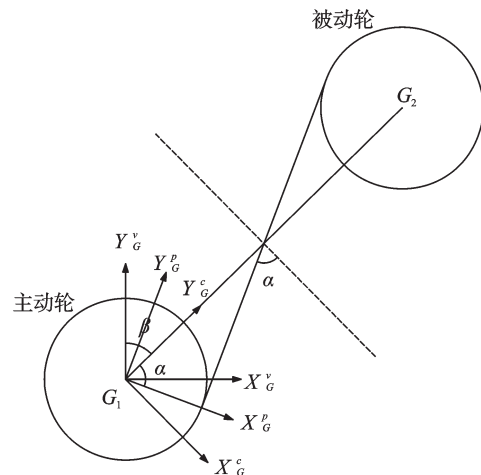


图3 齿轮副坐标系

c — Y 轴正方向沿齿轮副中心线方向; v — Y 轴正方向沿铅直方向; α —啮合角等于齿轮分度圆压力角; β —齿轮副中心线 G_1G_2 与铅直 Y 轴的夹角,范围为 $0 \sim \pi$ 。

本研究以齿轮中心线为 Y 轴建立直角坐标系 $G_1X_c^cY_c^c$,引入坐标变换矩阵 T ,令 $s = \sin \alpha$, $c = \cos \alpha$ 。

方程(11)经坐标变换得:

$$TM_c^p T^T \ddot{u}_c^c + TC_c^p T^T \dot{u}_c^c + TK_c^p T^T u_c^c = TQ_c^p \quad (14)$$

其中:

$$T = \begin{bmatrix} s & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ$$

在实际齿轮-转子系统中,齿轮副的中心线不一定与铅直 Y 轴重合,如图4所示。通过引入方位角 β ,建立新的坐标系 $G_1X_c^vY_c^v$,使得齿轮副的坐标系与转子系统的坐标系重合。令 $S = \sin \beta$, $C = \cos \beta$ 。

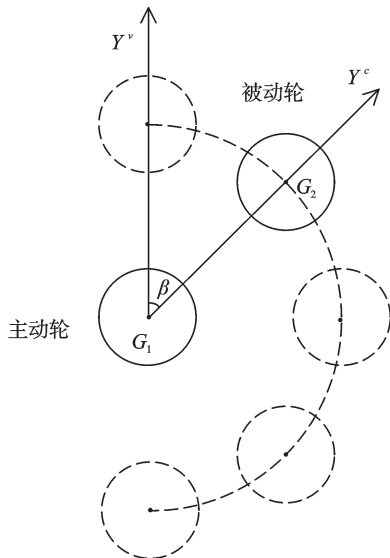


图4 齿轮副排列方式

方程式(12)经坐标变换可得:

$$DTM_c^p T^T D^T \ddot{u}_c^v + DTC_c^p T^T D^T \dot{u}_c^v + DTK_c^p T^T D^T u_c^v = DTQ_c^p \quad (15)$$

其中:

$$D = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ$$

3 齿轮传动转子模态分析

为便于计算,本研究对式(8)和式(11)进行简化,忽略高阶项,并代入式(15)。将齿轮副运动方程与转

子系统方程进行耦合,可得到系统的整体运动方程。本研究计算了单转子及耦合转子的临界转速,计算结果如表3所示。由表3可以看出耦合后转子的临界转速比单转子临界转速低,且耦合转子前三阶临界转速分别表现为转子1的一阶、转子2的一阶、转子1的二阶临界转速;由于转子1的三阶和转子2的二阶数值较接近,所以耦合转子的四阶可能表现为转子1的三阶和转子2的二阶同时存在。

表3 单转子及耦合转子临界转速(单位:r/min)

阶数	转子1	转子2	耦合转子
1	336.18	641.98	335.33
2	1 269.10	2 443.70	608.93
3	2 417.10	3 743.49	1 256.19
4	3 476.72	4 766.81	1 970.05
5	5 280.77	8 136.50	2 021.06
6			2 831.76
7			3 105.401
8			3 658.01

通过振型图可以验证模型及所求得临界转速的正确性,通常刚性支撑处振幅为0,由于圆盘和齿轮的影响,前三阶振型分别表现为不对称的0.5个、1个、1.5个振型波。耦合转子的前5阶振型图,如图5~10所示,可以看出耦合转子的一阶和二阶模态分别对应转子1和转子2的一阶模态,为0.5个振型波;耦合转子的三阶和五阶模态分别对应转子1和转子2的二阶模态,为1个振型波,而且耦合转子的五阶模态中还包含有轻幅的转子1的三阶模态;耦合转子的四阶模态表现为转子1的弯扭耦合振动,同时伴有转子2的轻幅二阶振动,这与理论分析结果一致。

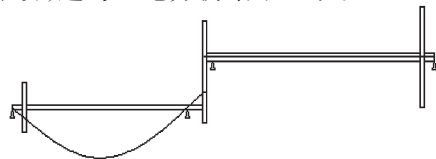


图5 耦合转子一阶弯振

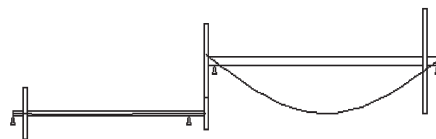


图6 耦合转子二阶弯振

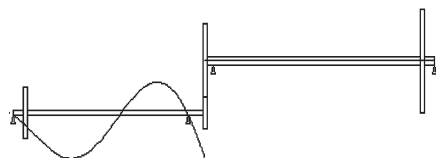


图7 耦合转子三阶弯振

(下转第649页)

6 结束语

根据热管的导热特性,本研究设计并研制了该测试系统,并最终实现了现场安装。本研究针对该测试系统介绍了其结构组成、PLC控制器程序设计实现、上位机软件设计实现、稳定性设计等内容。该系统经过几个月的现场运行,目前状况良好,测试的各项指标符合检测要求,能够根据操作人员输入的温度范围要求,甄别出符合要求的热管。

现场检验结果证明,该测试系统测量效率高、测量数据准确,并且运行稳定、可靠。

参考文献(References):

- [1] ZHANG H, ZHUANG J. Research development and industrial application of heat pipe technology in China [J]. *Applied Thermal Engineering*, 2003, 23(9): 1067-1083.
- [2] 奚正平, 汤慧萍, 朱纪磊, 等. 热管及热管用金属多孔材料[J]. *稀有金属材料与工程*, 2006, 35(2): 419-422.

- [3] 张 扬, 蔡春伟, 孙建明. S7-200PLC 原理与应用系统设计[M]. 北京: 机械工业出版社, 2007.
- [4] 西门子有限公司. 深入浅出西门子 S7-200[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2006.
- [5] [美] Solid Quality Learning. Microsoft SQL Server 2005 从入门到精通(数据库基础)[M]. 王 为, 译. 北京: 清华大学出版社, 2007.
- [6] 温 昱. 软件架构设计[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007: 25-50.
- [7] 郑宇军. C#面向对象程序设计[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2009.
- [8] [美] 霍夫曼. Visual C# 2005 技术内幕[M]. 李 虎, 许 福, 王晓博, 译. 北京: 机械工业出版社, 2007.
- [9] WATSON N. Beginning Microsoft Visual C# 2008[M]. Beijing: Tsinghua University Press & Prentice Hall, 2008.
- [10] 赵 毅. 数字滤波的算术平均法和加权平均法[J]. *仪表技术*, 2001(4): 41-44.

[编辑: 张 翔]

(上接第 635 页)

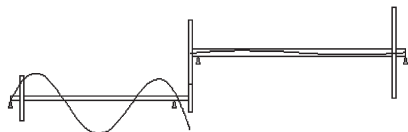


图8 耦合转子四阶弯振

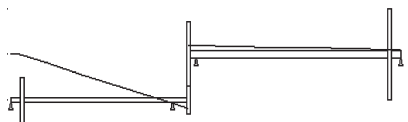


图9 耦合转子四阶扭振

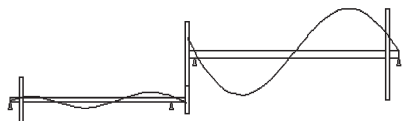


图10 耦合转子五阶弯振

4 结束语

本研究考虑陀螺效应、油膜支承,基于有限元法和拉格朗日方程,得到了弯扭耦合的5自由度的转子-轴承系统运动微分方程,并且基于牛顿第二定律,考虑齿轮啮合刚度和啮合阻尼的变化,得到了齿轮副的弯扭耦合的5自由度的运动微分方程,然后考虑实际齿轮副的排列方式,通过坐标变换,使转子-轴承模型与齿轮副模型的坐标统一化,并组合到一起,得到了整个齿轮-转子系统的弯扭耦合模型。

本研究计算了单转子和耦合后转子的临界转速,研

究结果表明耦合后转子临界转速比单转子临界转速低,并做出了振型图,振型的形状与理论分析一致,验证了本研究所建立的5自由度齿轮-转子模型的正确性,该模型对设计齿轮传动系统有实际意义。

参考文献(References):

- [1] MOHIUDDIN M A, KHULIEF Y A. Coupled bending torsional vibration of rotors using finite element [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 223(2): 297-316.
- [2] RAO J S, CHANG J R, SHIAU T N. Coupled bending-torsion vibration of geared rotors[C]//ASME Design Engineering Technical Conferences USA, 1995: 977-989.
- [3] RAO J S, SHIAU T N, CHANG J R. Theoretical analysis of lateral response due to torsional excitation geared rotors[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1998, 33(6): 761-783.
- [4] LEE A S, HA J W, CHOI D H. Coupled lateral torsional vibration characteristics of a speed increasing geared rotor-bearing system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 263(4): 725-742.
- [5] 蒋庆磊, 吴大转, 谭善光, 等. 齿轮传动多转子耦合系统振动特性研究[J]. *振动工程学报*, 2010, 22(3): 254-259.
- [6] 钟一鄂. 转子动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1987.
- [7] 张 翔, 董 彦, 陈文华. 小模数修正摆线铣刀对加工齿轮齿形的影响[J]. *轻工机械*, 2010, 28(4): 108-110.
- [8] KUANG J H, YANG Y T. An estimate of mesh stiffness and load sharing ratio of a spur gear pair[C]//ASME International Power Transmission and Gearing Conference USA, 1992: 1-9.

[编辑: 张 翔]